Confinement autour d'un point vortex stationnaire dans les domaines bornés de $\mathbb{R}^2$

Martin Donati encadré par Dragoș Iftimie,
Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de confinement de la vorticité dans des domaines bornés, dans le cadre des équations d'Euler bi-dimensionnelles incompressibles. L'objectif est d'étendre les résultats précédemment obtenus par Marchioro et Buttà dans [BM18], aux cas des domaines bornés avec un seul vortex placé à un point où sa propre influence à travers le bord est nulle. Le mémoire présente d'abord une introduction au système point vortex et sa dynamique dans les domaines bornés, puis présente un résultat original et en dresse la preuve complète.

Table des matières

1 Introduction

Le résultat de confinement que nous présentons dans ce mémoire sera présenté en section 3. Les sections 1 et 2 servent à introduire les différentes notions nécessaires à la bonne compréhension du problème.

Notations

Dans toute la suite,
- Ω, désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$,
- u, désigne un champs de vitesse solution des équations d'Euler, et p la pression associée,
- ω, désigne la vorticité d'un champs de vitesse u solution des équations d'Euler,
- G_Ω ou G, désigne la fonction de Green du domaine Ω,
- γ_Ω ou γ, désigne la partie régulière de la fonction de Green du domaine Ω, et l'on notera également $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x, x)$,
- $C, C_1, C_2, \dots; K, K_1, K_2, \dots$, désignent des constantes strictement positives et finies, lorsque leur valeur n'importe pas dans le calcul en cours,
- IPP, est utilisé comme acronyme de l'expression "Intégration Par Parties",
- $a \cdot b$, désigne le produit scalaire de a et b,
- $\nabla u, \nabla \cdot u, \nabla \wedge u$, $\nabla^\perp$, désignent respectivement le gradient de u, sa divergence, son rotationnel, et l'opérateur $(-\partial_2, \partial_1)$,
- $u^\perp$, désigne l'orthogonal de u, défini par $(u_1, u_2)^\perp = (-u_2, u_1)$,
- δ_z, désigne la masse de Dirac au point z.

1.1 Équations d'Euler

Les équations d'Euler incompressibles sont les équations de la mécanique des fluides qui régissent les fluides parfaits, c'est à dire non visqueux, et incompressibles. De ces équations sort une grandeur particulière, la vorticité, qui traduit la nature tourbillonnante du fluide. Nous nous intéressons ici au système point vortex, qui est le cas où la vorticité est une somme de masses de Dirac, c'est à dire infiniment concentrée en quelques points, et plus précisément aux approximations lisses de ce système. On considérera une vorticité lisse mais fortement localisée, c'est à dire à support dans un disque de rayon ε, où ε aura vocation à tendre vers 0. Le terme de *confinement* désignera ici le caractère localisé d'un blob [1] de vorticité.

Établissons brièvement les équations d'Euler, ainsi que les différentes conditions sur les grandeurs que nous allons introduire.

On se place en toute généralité sur un sous ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, et l'on définit un champ de vitesse

$$u : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, t) & \mapsto u(x, t). \end{cases}$$

Ce champ de vitesse est choisi à divergence nulle pour traduire la condition d'incompressibilité. De plus, le fluide n'est pas autorisé à quitter le domaine Ω. Ainsi, lorsque celui-ci possède un bord, il est nécessaire que u y soit tangent. L'équation de mécanique que l'on s'impose est obtenue par le principe fondamental de la dynamique, en remarquant que dans notre système la seule force qui s'applique sur le fluide est sa pression interne, que l'on note p. Puisque l'accélération est la dérivée particulaire de la vitesse, on obtient donc les équations d'Euler incompressibles pour un champ de vitesse précédemment défini muni d'une condition

1. Nous utiliserons ce mot anglais de l'expression *blob of vorticity* pour désigner une partie localisée du support de la vorticité.

initiale u_0 :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + u(x,t)\cdot\nabla u(x,t) = -\nabla p(x,t), & \forall (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x\in\Omega \\ \nabla\cdot u(x,t) = 0, & \forall (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,t)\cdot\vec{n} = 0, & \forall (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{1}$$

Notons bien que la condition de bord est vide lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$. On peut de plus écarter la pression de l'équation en remarquant que puisque u est à divergence nulle, en notant P le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle, l'équation mécanique est équivalente à :

$$\partial_t u + P(u\cdot\nabla u) = 0.$$

Introduisons maintenant la vorticité $\omega = \nabla\wedge u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$. C'est donc une fonction scalaire définie sur le même ensemble que la vitesse u. L'équation mécanique des équations d'Euler devient pour la vorticité :

$$\partial_t\omega(x,t) + u(x,t)\cdot\nabla\omega(x,t) = 0. \tag{2}$$

Cette équation nous indique que la vorticité est simplement transportée par vitesse. Une nouvelle fois, la pression est alors écartée. Bien entendu, la vorticité étant fonction de la vitesse, cette forme d'équation de transport ne rend pas l'équation triviale. Cependant, elle rend la visualisation des mécanismes des équations d'Euler plus simple.

Les résultats que nous appellerons de confinement *concernent la vorticité : si la vorticité initiale est à support compact, fortement localisé, sur quelle échelle de temps conserve-t-elle cette propriété ?*

La vitesse u est un champ à divergence nulle. Ainsi, il existe une fonction ψ appelée fonction de courant telle que $u = \nabla^\perp\psi$. Si l'on pose $\omega = \nabla\wedge u$, on obtient alors $\Delta\psi = \omega$. Ainsi, si l'on connaît la fonction de Green G_Ω du domaine Ω sur lequel on travaille, on obtient par inversion du Laplacien :

$$\psi(x,t) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y,t)\mathrm{d}y,$$

et donc

$$u(x,t) = \int_\Omega \nabla_x^\perp G_\Omega(x,y)\omega(y,t)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

En particulier, déterminer ω détermine entièrement la vitesse u. Cette dernière relation porte le nom de loi de Biot-Savart, et justifie le lien très étroit entre l'étude des équations d'Euler (1), et celle de l'équation de la vorticité (2) et de la fonction de Green associée au domaine d'étude. En particulier, rappelons que la fonction de Green de $\mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\forall x\neq y,\ \ G_{\mathbb{R}^2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|.$$

La loi de Biot-Savart s'écrit donc dans $\mathbb{R}^2$:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega(y,t)\mathrm{d}y \tag{4}$$

L'antisymétrie du noyau $\frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}$ implique en particulier le résultat suivant :

$$\iint_{(\mathbb{R}^2)^2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega(y,t)\omega(x,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_{(\mathbb{R}^2)^2} \frac{(y-x)^\perp}{2\pi|y-x|^2}\omega(x,t)\omega(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{5}$$

puisque les deux termes sont égaux et opposés ; résultat que l'on utilisera à de nombreuses reprises par la suite.

Dans la suite, nous utiliserons implicitement le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit $u_0 \in H^3(\mathbb{R}^2), \nabla \cdot u = 0$. Alors il existe une unique solution $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(H^3(\mathbb{R}^2))$ des équations d'Euler, globale en temps.*

Ici, H^3 désigne l'espace de Sobolev $W^{3,2}$. En particulier, sur un domaine Ω borné, on a $C^\infty(\Omega) \subset H^3(\Omega)$, et donc lorsque nous introduirons des vorticités initiales ω_0 lisses, c'est à dire C^∞, alors par la loi de Biot-Savart, u_0 est également régulière, et ce théorème nous assure donc l'existence d'une unique solution globale, qui sera alors également lisse. En revanche, précisons que lorsque Ω n'est pas borné, même si la condition initiale ω_0 est de classe C^∞ et à support compact, alors u_0 n'est généralement pas L^2, puisque divergente en $\frac{1}{|x|}$ à l'infini. Malgré tout, on a suffisamment de propriétés sur u_0 pour adapter la preuve du théorème et obtenir le même résultat dans ce cas là.

1.2 Fonction de Green

Rappelons que la fonction de Green est définie par

$$\Delta_x G_\Omega(x,y) = -\delta(x,y),$$

avec condition de Dirichlet d'être nulle au bord du domaine (à l'infini si celui-ci est non borné). Rappelons qu'elle est symétrique.

Par conséquent, on a pour tout domaine Ω, sur Ω^2, avec $x \neq y$:

$$\Delta_x(G_\Omega(x,y) - G_{\mathbb{R}^2}(x,y)) = 0,$$

c'est à dire que $G_\Omega - G_{\mathbb{R}^2}$ est une fonction que l'on note γ_Ω harmonique en chacune de ses deux variables sur Ω. Ainsi, l'on a $G_\Omega(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + \gamma_\Omega(x,y)$, où γ est en particulier symétrique et C^∞ sur $\Omega \times \Omega$.

Intéressons nous pour la suite au cas particulier du disque $D(0,1)$, on a :

$$G_{D(0,1)}(x,y) = \frac{\ln|x-y|}{2\pi} - \frac{\ln|x-y^*||y^*|}{2\pi}, \tag{6}$$

où $y^* = \frac{y}{|y^2|}$ est l'inversion par rapport au cercle unité. Cette formule est particulièrement importante à la lumière du résultat suivant.

Proposition 1.2. *Soit T une fonction biholomorphe d'un domaine Ω dans le disque $D(0,1)$, alors :*

$$G_\Omega(x,y) = G_{D(0,1)}(T(x),T(y)) = \frac{\ln|T(x)-T(y)|}{2\pi} - \frac{\ln|T(x)-T(y)^*||T(y)^*|}{2\pi}.$$

Nous utiliserons cette propriété de transport de la fonction de Green dans le but d'étendre le résultat obtenu dans [BM18] pour le disque aux domaines bornés quelconques.

2 Système point-vortex dans $\mathbb{R}^2$ et dans les domaines bornés

Un ouvrage de référence pour l'étude du système point-vortex est [MP93a]. Pour la lisibilité du mémoire, nous en rappelons ici brièvement les points principaux.

2.1 Dynamique du système point-vortex

On définit le système point vortex de la façon suivante. On cherche à exprimer la dynamique d'un ensemble de points portant chacun un Dirac de vorticité, évoluant par les équations d'Euler. Pour cela, prenons $\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{z_i}$ et exprimons formellement la loi de Biot-Savart (3) :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega \nabla_x^\perp G_\Omega(x,y)\omega(y)\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i=1}^{N} \nabla_x^\perp G_\Omega(x,z_i)a_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x-z_i)^\perp}{2\pi|x-z_i|^2} a_i + \nabla_x^\perp \gamma_\Omega(x,z_i)a_i \right]. \end{aligned}$$

Mais le terme $\dfrac{(x-z_i)^\perp}{2\pi|x-z_i|^2}$ n'a pas de sens pour $x = z_i$. Pour ces points, on choisit alors de supprimer ce terme, ce qui revient à supposer que le centre d'un vortex ne se déplace pas sous sa propre influence, sauf par effet de bord. Ce choix est appuyé par l'observation que localement proche de z_i, le terme $\dfrac{(x-z_i)^\perp}{2\pi|x-z_i|^2}$ est un vecteur qui "tourne" autour de 0 orthogonalement à $x - z_i$. Il est donc clair que la seule valeur envisageable de ce terme en z_i est 0. Pour comprendre comment ce choix est mathématiquement justifié, on peut se référer à l'article [MP93b], dans lequel il est démontré que pour tout $\delta > 0$ fixé et tout temps τ, il existe une quantité $\varepsilon > 0$ telle que si ω_0 est une vorticité initiale lisse concentrée dans un disque de rayon ε autour d'un point x, alors le support de la vorticité reste au moins jusqu'au temps τ dans un disque de rayon δ autour du point vortex fictif issu de x qui aurait évolué dans le même champs de vitesse extérieur que ω. Il s'agit d'une première preuve mathématique justifiant en temps arbitrairement grand la localisation arbitraire de la vorticité autour d'un point vortex.

Cependant, ce théorème ne se soucie pas de la petitesse de la quantité ε nécessaire à sa réalisation, ni de son rapport explicite aux quantités δ et τ. C'est l'objectif de l'article ultérieur [BM18], et du présent mémoire.

Finalement, si l'on note $z_i(t)$ la position des vortex au cours du temps, la dynamique du système point-vortex, que l'on vient de définir, s'écrit :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \;\; \frac{\mathrm{d}z_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j\neq i} \frac{(z_j-z_i)^\perp}{2\pi|z_j-z_i|^2} a_j + \sum_{j=1}^{n} \nabla_x^\perp \gamma_\Omega(z_j,z_i)a_j.$$

La reconstruction du champs de vitesse pour les autres points se fait par la loi de Biot-Savart (3). Il faut tout de même remarquer que ce système différentiel à N équations et N inconnues (complexes) n'a de sens seulement tant que $z_i(t) \neq z_j(t)$ pour tout $i \neq j$. En revanche, c'est un système Hamiltonien pour $H = \sum_{i \neq j} \frac{-\ln|z_i - z_j|}{2\pi} a_i a_j + \sum_{i,j=1}^{N} \gamma_\Omega(z_i, z_j) a_i a_j$, que l'on peut aussi écrire :

$$H = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \neq j} G_\Omega(z_i, z_j) a_i a_j + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\gamma}_\Omega(z_i) a_i^2\right),$$

en notant $\tilde{\gamma}_\Omega(x) = \gamma_\Omega(x, x)$. En effet, on a alors :

$$\begin{cases} a_i \dfrac{\mathrm{d}z_i^1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial z_i^2} \\ a_i \dfrac{\mathrm{d}z_i^2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial z_i^1}, \end{cases}$$

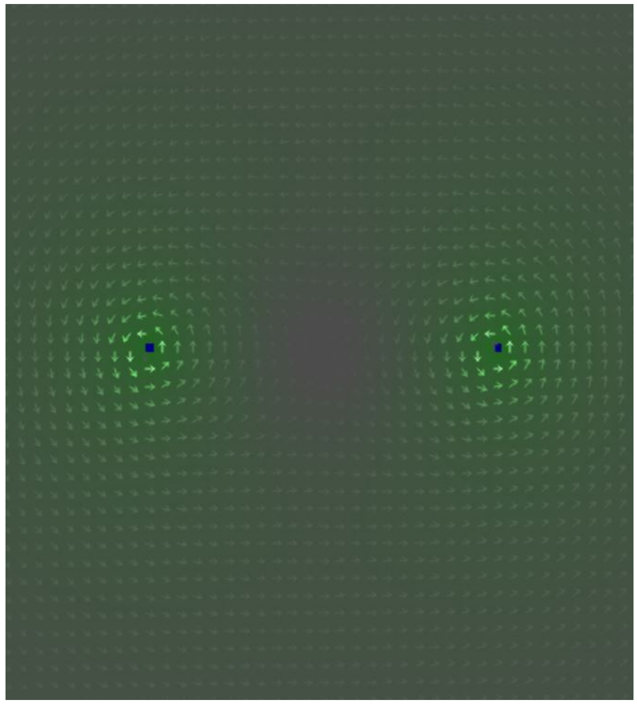
où $z_i = (z_i^1, z_i^2)$. Si $\Omega = \mathbb{R}^2$, c'est à dire $\gamma_\Omega = 0$, par les propriétés des systèmes Hamiltonien, en remarquant qu'alors H est invariant par translation et rotation, on obtient que $H, B = \sum_{i=1}^{N} a_i z_i$, et $I = \sum_{i=1}^{N} a_i z_i^2$ sont conservées au cours du temps.

De ces conservations, on déduit de suite que si tous les vortex ont même signe, alors leur trajectoires restent bornées.

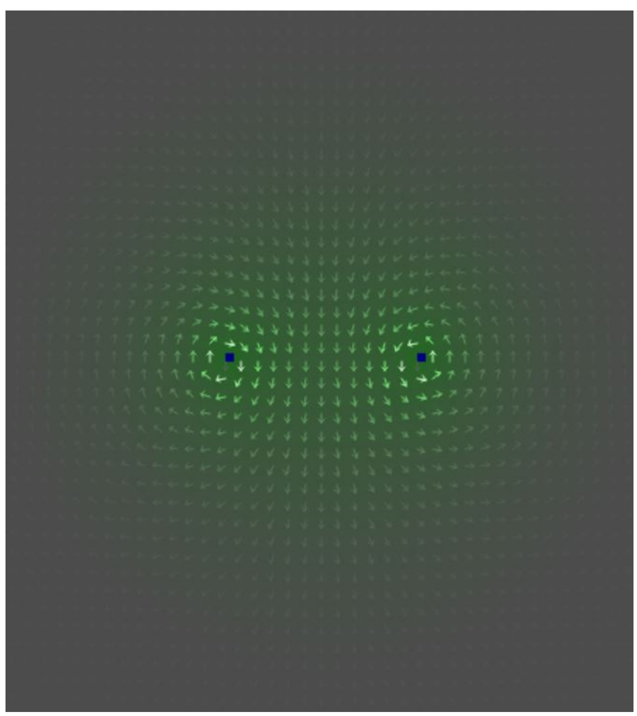
2.2 Exemples dans $\mathbb{R}^2$

D'après les lois de conservation, deux vortex évoluant dans $\mathbb{R}^2$ sont en rotation autour du centre de vorticité, sauf si $a_1 = -a_2$, auquel cas les vortex sont en translation rectiligne uniforme parallèle. Leur trajectoire est alors non bornée, mais la distance les séparant reste constante dans les deux cas.

Les graphiques qui suivent ont été obtenues sur le site http ://www.falstad.com/vector tenu par Paul Falstad.



Sur cette illustration, le champ de vitesse généré par deux points vortex de même intensité. La vitesse d'un point vortex est la vitesse engendrée par uniquement l'autre point vortex, ou encore la vitesse moyenne sur un cercle de rayon suffisamment petit centré sur le point. Les vitesses des points étant alors opposées, ils sont en rotation l'un autour de l'autre.



Sur cette illustration, le champ de vitesse généré par deux points vortex d'intensité opposée. Cette fois, les vitesse des points vortex sont les mêmes (un quart de la vitesse obtenue au milieu du segment joignant les points), et la paire est en translation rectiligne uniforme.

Une des questions liées au confinement, est la question de la vitesse d'éloignement des points vortex. En effet, il est raisonnable de penser que le modèle des points-vortex reste valable tant que les supports des blob de vorticités restent disjoints, et éventuellement séparés par une distance strictement minorée ; voire que le rayon des supports doit rester petit devant la distance séparant les points.

On peut avec 4 points vortex obtenir une distance séparant deux des points divergente en $\mathcal{O}(t)$, en effet : posons $a_1 = -a_2 = -a_3 = a_4 > 0$, avec $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (-x, y)$, $z_3 = (x, -y)$, $z_4 = (-x, -y)$, et $0 < 4x_0 < y_0$. La conservation de l'énergie (H) donne alors :

$$\sum_{i \neq j} a_i a_j \ln |z_i - z_j| = C,$$

c'est à dire

$$-\ln(2x) - \ln(2y) + \ln(2\sqrt{x^2 + y^2}) = C,$$

et donc

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = C.$$

De ceci on tire de suite que $y > \frac{1}{C} > 0$. On a de plus :

$$x' = \frac{ax^2}{4\pi y(x^2 + y^2)}, \quad y = -\frac{ay^2}{4\pi x(x^2 + y^2)},$$

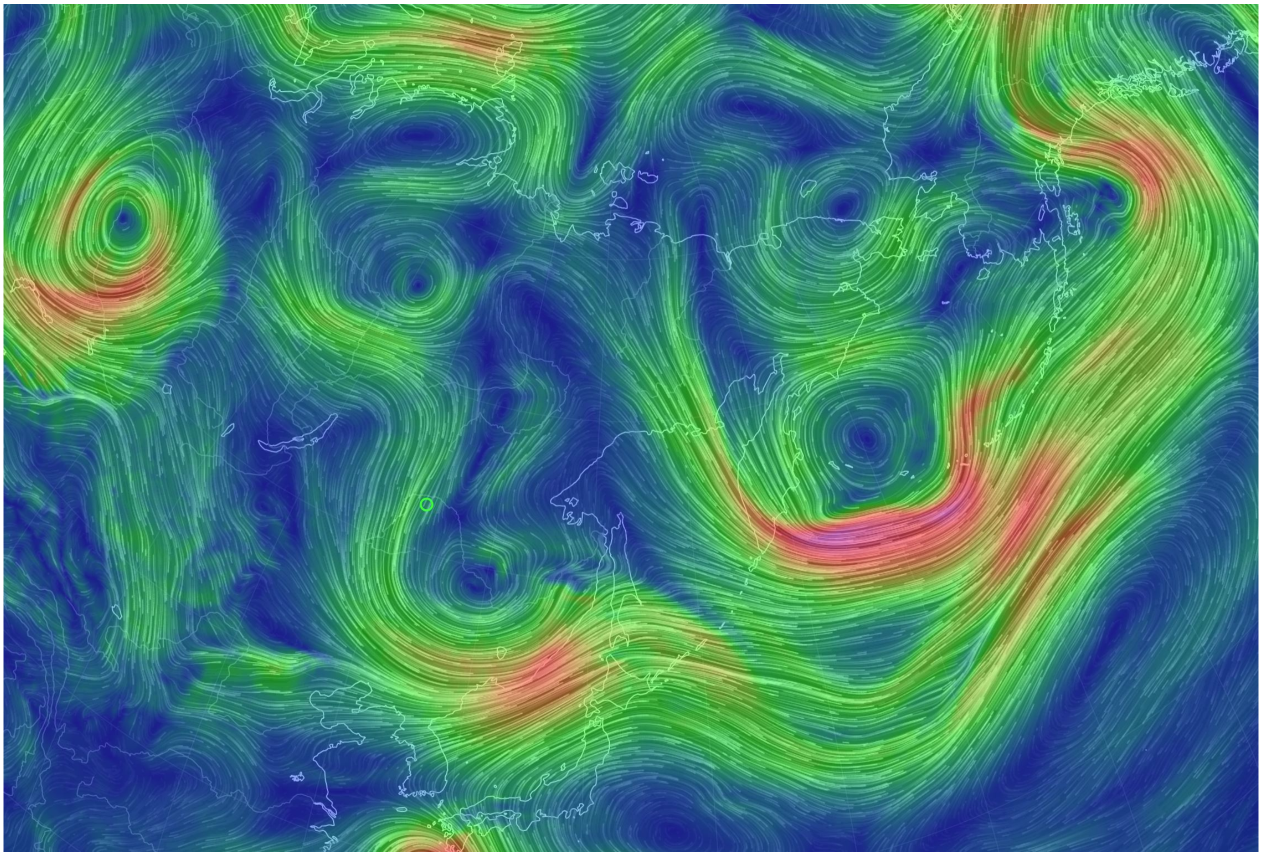
de sorte que x croit et y décroît. De fait, y a donc une limite finie en l'infini, donc x a une limite à l'infini (éventuellement infinie), et donc x' a une limite finie strictement positive à l'infini. On en déduit donc que $x(t) = \mathcal{O}(t)$.

Ainsi les points vortex restent à distance non nulle pour tout temps, et les paires de points s'écartent bien en $\mathcal{O}(t)$.

Notons que les points vortex ne peuvent s'écarter les uns des autres plus vite qu'en $\mathcal{O}(\sqrt{t})$. En effet, notons $d(t) = \min_{i \neq j}(|z_i - z_j|)$. On peut alors majorer la norme de la vitesse s'appliquant sur chaque point vortex par $\dfrac{C}{d(t)}$, ce qui donne $d'(t) \leq \dfrac{C}{d(t)}$, et donc $d(t) \leq C'\sqrt{1 + t}$.

On pourra trouver d'autres exemples et de plus amples approfondissements sur le sujet dans [Ift04].

Si nous traiterons par la suite uniquement dans le cas du plan $\mathbb{R}^2$ et de ses sous ensembles connexes et bornés, l'étude du système point vortex sur la sphère S^2 par exemple semble particulièrement pertinente lorsque l'on s'intéresse aux courants atmosphériques terrestres :



Ici, l'on observe les courants aériens à 5570 mètres environ au dessus de l'Asie orientale [2].

2.3 Évolution d'un unique point vortex dans un domaine borné

La fonction $\tilde{\gamma}_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}^2$, que l'on notera désormais simplement $\tilde{\gamma}$, a été largement étudiée dans l'article [Gus79]. On y apprend en particulier qu'elle est super harmonique, c'est à dire que $\Delta\tilde{\gamma} \leq 0$, et qu'elle diverge proche du bord, avec une vitesse logarithmique en la distance au bord (négativement).

On considère désormais un domaine Ω borné. En particulier, intéressons nous à la dynamique d'un unique point vortex de masse unitaire. On note $x(t)$ sa position au temps t. Il vient alors d'après les calculs faits en section 2.1 :

$$x'(t) = \nabla^\perp \tilde{\gamma}_\Omega(x). \tag{7}$$

L'article [Gus79] montre alors que cette dynamique est toujours définie pour tous temps $t \geq 0$. On remarque alors que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\gamma}(x(t)) = x'(t) \cdot \nabla\tilde{\gamma}(x(t)) = 0.$$

Ainsi, le point vortex évolue sur une ligne de niveau $\tilde{\gamma}(x) = \text{cst}$. La nature géométrique de ces courbes est donc un élément essentiel pour comprendre la dynamique d'un point vortex

2. Image obtenue sur https ://earth.nullschool.net, avec les paramètres : Date | 2018-08-21 15 :00, Position | 52.91°N, 122.48°E, Mode | Air (Wind), Height | 500hPa, Source | GFS / NCEP / US National Weather Service.

dans un domaine borné. En particulier, il est clair que si x_0 est un point critique de $\tilde{\gamma}$, alors $x' = 0$ et le point vortex est stationnaire. Cependant, il est important de distinguer les points critiques selon un critère de stabilité. Pour prendre un critère adapté, il est important de bien définir notre notion de stabilité.

Puisque l'on a la fonction de Green du disque (6), on peut calculer explicitement les lignes de niveaux de $\tilde{\gamma}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(x) = C &\iff -\ln(|x - x^*||x^* *|) = 2\pi C \\ &\iff \ln((1 - \frac{1}{|x|^2}) = 2\pi C \\ &\iff |x| = (1 - \exp(2\pi C))^{-1}\end{aligned}$$

Les lignes de niveau de $\tilde{\gamma}$ sont donc des cercles concentriques. Une illustration du comportement des courbes de niveaux de $\tilde{\gamma}$, proposée dans l'article [Gus79], p48, est la suivante :

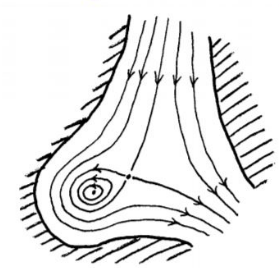


Fig. 3.2

On s'intéresse particulièrement au comportement d'un point vortex au voisinage d'un point critique x_0. Écrivons le développement de $\tilde{\gamma}$. Puisque x_0 est un point critique, on a :

$$\tilde{\gamma}(x) = \tilde{\gamma}(x_0) + \mathrm{D}^2\tilde{\gamma}(x_0)(x - x_0, x - x_0) + o(|x - x_0|^2),$$

où $\mathrm{D}^2\tilde{\gamma}$ est la matrice hessienne de $\tilde{\gamma}$. La matrice $\mathrm{D}^2\tilde{\gamma}$ est diagonalisable en base orthonormée car symétrique réelle, et l'on note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. Distinguons alors les cas :

— Soit $\mathrm{D}^2\tilde{\gamma}$ est définie positive ou négative, et alors x_0 est un extremum local. Dans ce cas, $\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}(x_0)$ est localement une forme quadratique strictement signée, et les courbes de niveaux proches de x_0 sont des courbes fermées entourant le point. (de même signe), on peut écrire $|\tilde{\gamma}(x) - \tilde{\gamma}(x_0)| = |\lambda_1|(x - x_0)_1^2 + |\lambda_2|(x - x_0)_2^2 + o(|x - x_0|^2)$, ce qui montre que si l'on s'intéresse à la courbe de niveau $\tilde{\gamma}(x) = \tilde{\gamma}(x_0) \pm \varepsilon$, celle-ci est proche de l'ellipse d'axes $|\lambda_1|/\sqrt{|\varepsilon|}$ et $|\lambda_2|/\sqrt{|\varepsilon|}$.

— Soit les valeurs propres de $\mathrm{D}^2\tilde{\gamma}$ sont de signe opposé, auquel cas la courbe de niveau $\tilde{\gamma}(x) = \tilde{\gamma}(x_0)$ s'auto-intersecte en x_0, et peut s'éloigner arbitrairement loin de x_0 suivant les domaines,

— Soit une des valeurs propres est nulle, auquel cas ce sont les termes d'ordre supérieur qui entrent en compte. Dans ce cas, les deux situations précédentes peuvent avoir lieu, mais on peut voir aussi un nouveau cas : en prenant par exemple pour Ω un anneau, les cercles de même centre que l'anneau sont des lignes de niveaux dont tous les points sont critiques.

Notons bien que puisque $\tilde{\gamma}$ est super harmonique, les extrema locaux sont des maxima. Pour espérer le confinement de la vorticité autour d'un point vortex, il est clair que c'est le premier cas qui va être pertinent : en effet, on peut déjà affirmer qu'un point vortex placé assez prêt d'un extremum local reste indéfiniment proche de ce point. Puisque $\tilde{\gamma}$ diverge négativement vers le bord, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Pour tout domaine borné Ω, il existe au moins un point x_0 qui est un maximum local de $\tilde{\gamma}$.*

Ainsi, il existe toujours un point qui peut permettre le confinement dans un domaine borné. Naturellement, ce point x_0 devra donc jouer le rôle de 0 dans l'adaptation de la preuve dans le cas du disque de l'article [BM18]. On a de plus la propriété suivante, dont on trouvera la preuve dans [Gus79] :

Proposition 2.2. *Si de plus Ω est convexe, alors il existe un unique maximum local (et donc global) de $\tilde{\gamma}$.*

3 Confinement autour d'un point vortex

Considérons maintenant la question du confinement, que nous avons déjà présentée brièvement. Nous allons donc considérer une vorticité initiale $\omega_{0,\varepsilon}$ concentrée dans un disque de rayon ε, et étudier le temps $\tau_{\varepsilon,\eta}$ durant lequel ω_ε reste dans un disque de rayon ε^β, avec $\beta < 1/2$. Le résultat avec $\beta < 1/2$ est malheureusement un peu affaibli par la remarque faite au paragraphe 2.2 concernant l'écartement des points vortex, au maximum en $\mathcal{O}(\sqrt{t})$. Un résultat de confinement avec $\beta < 1/2$ ne permet donc pas d'assurer que les supports des vorticités dans le cas de plusieurs points vortex resteraient disjoints.

Détaillons le contexte de ce problème.

3.1 Notations et introduction du problème

On considère un domaine ouvert borné simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, vu également comme sous ensemble de $\mathbb{C}$, de sorte que d'après le théorème de l'application conforme, il existe un biholomorphisme $T : \Omega \to D(0,1)$. On considère un unique point vortex placé en x_0, et une approximation régulière $\omega_{0,\varepsilon}$ telle que $\omega_{0,\varepsilon} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \omega_{0,\varepsilon} \subset D(x_0, \varepsilon)$, $\displaystyle\int \omega_{0,\varepsilon}(x)\mathrm{d}x = 1$. Ainsi, il est important de noter que dès que ε est assez petit, $\omega_{0,\varepsilon}$ est à support compact.

On définit :

$$\tau_{\varepsilon,\beta} = \min_t \sup\{t > 0, \forall s \in [0,t], \operatorname{supp} \omega_\varepsilon(s) \subset D(x_0, \varepsilon^\beta)\}, \tag{8}$$

le temps nécessaire au blob de vorticité pour sortir du disque $D(x_0, \varepsilon^\beta)$, en étant issu du disque $D(x_0, \varepsilon)$. Notons bien que ce temps est strictement positif si $\beta < 1$. Une nouvelle fois, il est important de remarquer que pour ε assez petit, pour tout $t < \tau_{\varepsilon,\beta}$, ω_ε est à support compact.

Enfin, notons [3]

$$F(x,t) = \int \nabla_x^\perp \gamma(x,y)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Cette quantité représente l'influence de la vorticité obtenue uniquement par réflexion sur le bord au point x et au temps t, tandis que $\displaystyle\int \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y$ est la partie d'influence directe, c'est à dire la seule que l'on aurait sans présence d'un bord. La décomposition de la fonction de Green assure que ces deux quantités s'ajoutent naturellement pour obtenir l'influence totale.

Présentons alors les deux résultats de l'article [BM18] qui nous intéressent. Le premier est un résultat de confinement dans $\mathbb{R}^2$ sans bord :

Théorème 3.1. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec une vorticité initiale concentrée dans un disque de rayon ε. On suppose qu'il existe M et $\nu > 0$ tels que $|\omega_{0,\varepsilon}| \leq M\varepsilon^{-\nu}$. Alors pour tout $\beta < 1/2$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\xi > 0$ tels que*

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \;\; \tau_{\varepsilon,\beta} > \xi|\ln(\varepsilon)|.$$

Le temps de sortie $\tau_{\varepsilon,\beta}$ est donc au moins logarithmique en ε. En revanche, l'article traite aussi le cas particulier où $\Omega = D(0,1)$, où l'on a alors :

Théorème 3.2. *On se place sur $\Omega = D(0,1)$, avec une vorticité initiale concentrée dans le disque $D(0,\varepsilon)$.*

On suppose qu'il existe M et $\nu > 0$ tels que $|\omega_{0,\varepsilon}| \leq M\varepsilon^{-\nu}$. Alors pour tout $\beta < 1/2$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\xi > 0$ tels que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \;\; \tau_{\varepsilon,\beta} > \varepsilon^{-\xi}.$$

Dans le cas du disque, on obtient un résultat bien meilleur puisque le temps de validité du confinement dans un disque de rayon ε^β est désormais une fonction puissance en ε. La raison essentielle de ce résultat est la connaissance explicite de la fonction de Green du disque, qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall x, z \in D(0,\delta), \forall t \geq 0, \;\; |F(x,t) - F(z,t)| \leq |x-z|\delta^2. \tag{10}$$

Ainsi un des objectifs pour transporter ces résultats dans les domaines bornés est d'obtenir une majoration similaire dans le cas général. Ce sera fait au lemme 3.6.

Pour chercher à obtenir un résultat de confinement, il est déjà intéressant de se référer au cas du point vortex. Si un point vortex placé au centre de vorticité du blob initial qui nous intéresse ne reste pas assez proche du point d'équilibre, le résultat de confinement a toutes les chances d'échouer. A la lumière des remarques effectuées à la section 2.3, on cherche donc un point d'équilibre qui soit un extremum local de la fonction $\tilde{\gamma}$. D'après la proposition 2.1, on peut choisir x_0 un point de Ω qui soit un maximum local de $\tilde{\gamma}$. Puisque nous cherchons à être analogues au cas du disque, il est intéressant de remarquer que de plus, par les propriétés des biholomorphismes du disque, on peut également choisir $T(x_0) = 0$. En effet, les biholomorphismes du disque sont exactement les applications :

$$\phi_{a,\lambda}(z) = \lambda \frac{a-z}{1-\bar{a}z},$$

3. On ne note pas la dépendance en ε de F pour ne pas alourdir la notation.

dont l'image de 0 est λa. Par conséquent, si T est un biholomorphisme de Ω dans $D(0,1)$ obtenu par le théorème de l'application conforme, alors $(\phi_{T(x_0),1})^{-1}\circ T$ est un biholomorphisme de Ω dans $D(0,1)$ qui envoie x_0 sur 0.

Montrons qu'alors nécessairement $T''(x_0)=0$.

Proposition 3.3. *Si $T:\Omega\to D(0,1)$ est un biholomorphisme, que $x_0\in\Omega$ est un point critique de $\tilde{\gamma}$ et que $T(x_0)=0$, alors $T''(x_0)=0$.*

Démonstration. Rappelons que la fonction de Green du domaine Ω est donnée par la proposition 1.2, et que l'on a donc :

$$\nabla_x G_\Omega(x,y)=\frac{\mathrm{D}T_x^t(T(x)-T(y))}{2\pi|T(x)-T(y)|^2}-\frac{\mathrm{D}T_x^t(T(x)-T(y)^*)}{2\pi|T(x)-T(y)^*|^2}.$$

Puisque T est biholomorphe, $\mathrm{D}T_x^t u=\bar{T}'(x)u$ pour tout vecteur u en assimilant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, et donc :

$$\nabla_x\gamma(x,y)=\frac{\bar{T}'(x)(T(x)-T(y))}{2\pi|T(x)-T(y)|^2}-\frac{\bar{T}'(x)(T(x)-T(y)^*)}{2\pi|T(x)-T(y)^*|^2}-\frac{(x-y)}{2\pi|x-y|^2}. \tag{11}$$

Ainsi, lorsque y tend vers x :

$$\begin{aligned}\nabla_x\gamma(x,y)&=\frac{\left(\bar{T}'(x)((x-y)T'(x)+\frac{1}{2}(x-y)^2T''(x))+\mathcal{O}((x-y))^3\right)}{2\pi|(x-y)T'(x)+\frac{1}{2}(x-y)^2T''(x)+\mathcal{O}((x-y)^3)|^2}-\frac{(x-y)}{2\pi|x-y|^2}\\&=\frac{\bar{T}'(x)((x-y)T'(x)+\frac{1}{2}(x-y)^2T''(x))+\mathcal{O}((x-y))^3}{2\pi|(x-y)T'(x)|^2|\left(1+2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2T'(x)}(x-y)T''(x)\right)+\mathcal{O}((x-y)^2)\right)}-\frac{(x-y)}{2\pi|x-y|^2}\\&=\bar{T}'(x)\frac{\frac{1}{2}(x-y)^2T''(x)-(x-y)^2\frac{1}{2}T''(x)-\frac{1}{2}|x-y|^2\overline{T''(x)}+\mathcal{O}((x-y)^3)}{2\pi|(x-y)T'(x)|^2}\\&=\frac{\bar{T}'(x)\bar{T}''(x)}{4\pi|T'(x)|^2}+\mathcal{O}(x-y).\end{aligned}$$

De fait, si $\nabla\tilde{\gamma}(x_0)=0$, c'est que nécessairement $T''(x_0)=0$ puisque T' ne s'annule pas sur Ω.

□

Il est important de remarquer que contrairement au cas du système point vortex, on n'a pas $F(x_0,t)=0$ *a priori*, puisque le blob de vorticité n'est pas strictement concentré en un point, ni ne possédant des symétries particulières. Plus précisément, d'après (11),

$$\begin{aligned}2\pi\overline{\nabla_x\gamma(x_0,y)}&=-\frac{T'(x_0)}{T(y)}+\frac{T'(x_0)}{T(y)^*}-\frac{1}{x_0-y}\\&=\frac{1}{y-x_0}\left(1+\frac{T'''(x_0)}{T'(x_0)}\frac{(y-x_0)^2}{6}+\mathcal{O}(|y-x_0|^3)\right)^{-1}+T'(x_0)\bar{T}(y)-\frac{1}{x_0-y}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$2\pi\overline{\nabla_x\gamma(x_0,y)}=\frac{T'''(x_0)}{6T'(x_0)}(y-x_0)+|T'|^2(x_0)\overline{y-x_0}+\mathcal{O}(|y-x_0|^2), \tag{12}$$

3.2 Résultats

Présentons maintenant les deux résultats principaux du mémoire. On rappelle qu'on choisit Ω borné, x_0 maximum local de $\tilde{\gamma}$, $T : \Omega \to D(0,1)$ tel que $T(x_0) = 0$ et qu'alors $T''(x_0) = 0$, et $\omega_{0,\varepsilon}$ une fonction positive régulière à support dans $D(0,\varepsilon)$ et d'intégrale 1.

Théorème 3.4. *Soit Ω et T vérifiant les conditions précédentes. On suppose qu'il existe M et $\nu > 0$ tels que $|\omega_{0,\varepsilon}| \leq M\varepsilon^{-\nu}$. Alors pour tout $\beta < 1/2$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\xi > 0$ tels que*

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \;\; \tau_{\varepsilon,\beta} > \xi |\ln(\varepsilon)|.$$

Théorème 3.5. *Soit Ω et T vérifiant les conditions précédentes. On suppose qu'il existe M et $\nu > 0$ tels que $|\omega_{0,\varepsilon}| \leq M\varepsilon^{-\nu}$, et que $T'''(x_0) = 0$. Alors pour tout $\beta < 1/2$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\xi > 0$ tels que*

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \;\; \tau_{\varepsilon,\beta} > \varepsilon^{-\xi}.$$

La seule différence dans leurs hypothèses est la condition pour le second énoncé $T'''(x_0) = 0$. On a alors un résultat beaucoup plus fort puisque plutôt que d'obtenir une borne inférieure logarithme en ε, on a une borne inférieure qui est une fonction puissance de ε. Nous allons dresser en détails la preuve du théorème 3.5, et structurer la preuve de manière à mettre en évidence l'utilisation de la condition $T'''(x_0) = 0$, et comprendre comment adapter la preuve au cas général pour obtenir le théorème 3.4.

3.2.1 Lemmes intermédiaires

Débutons par un lemme concernant le caractère lipschitzien de la fonction F, qui décrit l'influence du blob de vorticité sur lui même à travers le bord. Ce lemme a vocation à étendre l'inéquation (10) aux domaines bornés quelconques.

Lemme 3.6. *On a le développement suivant, pour $\delta < 1$ et pour $x, y, z \in D(x_0, \delta)$:*

$$\overline{\nabla_x \gamma(x,y)} - \overline{\nabla_x \gamma(z,y)} = (x - z)\left(\frac{T'''(x_0)}{6\pi T'(x_0)} + \mathcal{O}(\delta)\right). \tag{13}$$

En particulier, il existe une constante C telle que pour δ assez petit,

$$\forall x, y, z \in D(x_0, \delta), \;\; |F(x,t) - F(z,t)| \leq |x - z| K(\delta), \tag{14}$$

où $K(\delta) = \dfrac{T'''(x_0)}{6\pi T'(x_0)} + C\delta$.

Démonstration. Notons $R(x,y,z) = 2\pi(\overline{\nabla_x \gamma(x,y) - \nabla_x \gamma(z,y)})$. Tout d'abord, l'expression explicite développée de R est en apparence singulière en (x_0, x_0, x_0). Toutefois, il est clair que quel que soit x et y, $R(x,y,x) = 0$ et donc R se factorise par $(x - z)$. Précisons.

$$\begin{aligned} R(x,y,z) = \frac{T'(x)}{T(x) - T(y)} - \frac{T'(x)}{T(x) - T(y)^*} - \frac{1}{x - y} \\ - \left(\frac{T'(z)}{T(z) - T(y)} - \frac{T'(z)}{T(z) - T(y)^*} - \frac{1}{z - y}\right), \end{aligned}$$

que l'on écrit de suite sous la forme :

$$R(x,y,z) = \frac{T'(x)(T(z)-T(y)) - T'(z)(T(x)-T(y))}{(T(x)-T(y))(T(z)-T(y))} - \frac{x-z}{(x-y)(z-y)} \\ - \frac{T'(x)(T(z)-T(y)^*) - T'(z)(T(x)-T(y)^*)}{(T(x)-T(y)^*)(T(z)-T(y)^*)}.$$

Notons $R_2(x,y,z) = \dfrac{T'(x)(T(z)-T(y)^*) - T'(z)(T(x)-T(y)^*)}{(T(x)-T(y)^*)(T(z)-T(y)^*)}$.
On a alors pour $\delta < 1$:

$$\begin{aligned} |R_2(x,y,z)| &\leq 4\delta^2 |T'(x)T(z) - T'(z)T(x)| + \frac{|T(y)^*|}{|T(x)-T(y)^*|}\frac{|T'(z)-T'(x)|}{|T(z)-T(y)^*|} \\ &\leq K_1\delta^2|x-z| + 2\frac{|T'''(x_0)|}{2}|x-z|^2\delta \\ &\leq K_2\delta^2|x-z|. \end{aligned}$$

Ce terme est donc négligeable dans la majoration recherchée.

On note désormais $R_1(x,y,z) = R(x,y,z) + R_2(x,y,z)$. Ce terme, réduit au même dénominateur, possède 2 pôles d'ordre 2 : quand x, y et z sont proches de x_0, le dénominateur est équivalent à $T'^2(x_0)(x-y)^2(z-y)^2$. Puisque l'on a annoncé que R se factorisait par $x-z$, il convient donc que numérateur s'annule à l'ordre 5 en (x_0,x_0,x_0). Ainsi, pour déterminer un équivalent ou une majoration de $R_1(x,y,z)$, on s'intéresse aux dérivées d'ordre supérieurs à 5 du numérateur, qui vaut :

$$N(x,y,z) = (T'(x)(T(z)-T(y)) - T'(z)(T(x)-T(y)))(x-y)(z-y) \\ - (x-z)(T(x)-T(y))(T(z)-T(y)). \quad (15)$$

Puisque $N(x,y,z)$ se factorise par $(x-y)^2(z-y)^2(x-z)$, on a l'identité suivante :

$$\frac{R_1(x,y,z)}{x-z} \sim_{x,y,z\to x_0} \frac{\partial_x^3\partial_z^2 N(x_0,x_0,x_0)}{12T'(x_0)^2}.$$

Un calcul direct donne à partir de (15) :

$$\partial_x^3\partial_z^2 N(x_0,x_0,x_0) = 4T'(x_0)T'''(x_0),$$

et donc finalement, il existe une constante K_3 telle que

$$R(x,y,z) = (x-z)\left(\frac{T'''(x_0)}{3T'(x_0)} + \mathcal{O}(\delta)\right),$$

ce qui donne bien le premier résultat du lemme. En intégrant par rapport à y et en passant à la valeur absolue, par inégalité triangulaire on a directement l'inéquation (14).

□

Ce lemme donne bien une majoration de la forme recherchée, bien qu'au lieu du terme δ^2 dans l'expression (10), on ait un terme constant en $T'''(x_0)$, et un terme suivant en δ. Lorsque l'on ne supposera rien de plus sur T, on aura une simple majoration lipschitzienne sur F, ce qui donnera le résultat logarithmique, tandis que lorsque l'on supposera $T'''(x_0) = 0$, on aura l'ordre δ supplémentaire qui permettra d'obtenir les mêmes propriétés que celles obtenues par (10). Il s'agit donc de l'outil principal qu'il manquait pour adapter la preuve dressée dans l'article [BM18] aux domaines bornés quelconques. Le reste de la preuve est donc essentiellement une adaptation directe de celle de l'article.

On introduit le centre de vorticité

$$B_\varepsilon(t) = \int_\Omega x\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

et le moment d'inertie par rapport au centre de vorticité

$$I_\varepsilon(t) = \int_\Omega |x - B_\varepsilon|^2\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

On a alors les estimations suivantes :

Lemme 3.7. *Pour tout $t < \tau_{\varepsilon,\beta}$, on a d'une part :*

$$I_\varepsilon(t) \leq 4\varepsilon^2 \exp(2K(\varepsilon^\beta)t). \tag{18}$$

et d'autre part :

$$|B_\varepsilon(t) - x_0| \leq 2\varepsilon \exp(K_3K(\varepsilon^\beta)t) + 4\varepsilon^2 \exp(2K(\varepsilon^\beta)t)\frac{1}{K(\varepsilon^\beta)}(\exp(K_3K(\varepsilon^\beta)t) - 1), \tag{19}$$

où K_3 est une constante réelle positive.

Démonstration. On a alors pour tout $t < \tau_{\varepsilon,\beta}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_\varepsilon(t)\right| &= \left|\int \left(|x - B_\varepsilon|^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_\varepsilon(x,t) + 2\dot{B}_\varepsilon(t)\cdot(x - B_\varepsilon)\omega_\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int \left(-|x - B_\varepsilon|^2 u(x,t)\cdot\nabla\omega_\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x + 0\right| \text{ d'après (2) et (16),} \\
&= \left|\int (2(x - B_\varepsilon)\cdot\nabla u(x,t)\omega_\varepsilon(x,t))\,\mathrm{d}x\right| \text{ par IPP,} \\
&= \left|\iint 2(x - B_\varepsilon)\cdot\nabla_x^\perp\gamma(x,y)\omega_\varepsilon(x,t)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \text{d'après (3),} \\
&= \left|\iint 2(x - B_\varepsilon)\cdot[\nabla_x^\perp\gamma(x,y) - \nabla_x^\perp\gamma(B_\varepsilon(t),y)]\omega_\varepsilon(x,t)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \\
&\leq 2K(\varepsilon^\beta)I_\varepsilon(t),
\end{aligned}$$

et l'on a donc $I_\varepsilon(t) \leq I_\varepsilon(0)\exp(2K(\varepsilon^\beta)t)$. De plus, $I_\varepsilon(0) \leq 4\varepsilon^2$ et finalement :

$$I_\varepsilon(t) \leq 4\varepsilon^2 \exp(2K(\varepsilon^\beta)t).$$

Calculons maintenant :

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_\varepsilon(t) &= \int x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \\
&= -\int xu \cdot \nabla \omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x, \quad \text{d'après (2),} \\
&= \int \nabla \cdot (xu)\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x, \quad \text{par IPP,} \\
&= \int u\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x, \quad \text{car } u \text{ est à divergence nulle,} \\
&= \iint \left(\frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} + \nabla_x^\perp \gamma(x,y) \right) \omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \\
&= \int F(x,t)\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x, \quad \text{d'après (5).}
\end{aligned}
$$

Une première idée pour obtenir une estimation de $B_\varepsilon(t)$ est de remarquer que

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_\varepsilon(t) = \iint (\nabla_x^\perp \gamma(x,y) - \nabla_x^\perp \gamma(B_\varepsilon(t),y) + \nabla_x^\perp \gamma(B_\varepsilon(t),y) \\
- \nabla_x^\perp \gamma(x_0,y) + \nabla_x^\perp \gamma(x_0,y) - \nabla_x^\perp \gamma(x_0,x_0))\omega_\varepsilon(x,t)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

car $\nabla_x^\perp \gamma(x_0,x_0) = 0$. Le lemme 3.6 s'applique pour majorer les deux premières différences, mais l'équation (12) implique en particulier qu'il n'est pas raisonnable d'espérer majorer $|\nabla_x^\perp \gamma(x_0,y)|$ par un terme de la forme $K(\varepsilon^\beta)|y-x_0|$, et la majoration proposée par l'article [BM18] échoue.

En revanche, on peut calculer :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|B_\varepsilon(t) - x_0|^2 &= 2\dot{B}_\varepsilon(t) \cdot (B_\varepsilon(t) - x_0) \\
&= \iint \nabla_x^\perp \gamma(x,y)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \cdot (B_\varepsilon(t) - x_0)
\end{aligned}
$$

Pour majorer ceci, détaillons. D'après le lemme 3.6, ainsi que (12), on a :

$$
\begin{aligned}
2\pi\nabla_x^\perp \gamma(x,y) &= 2\pi(\nabla_x^\perp \gamma(x,y) - \nabla_x^\perp \gamma(x_0,y) + \nabla_x^\perp \gamma(x_0,y)) \\
&= \overline{(x-x_0)^\perp \frac{T'''(x_0)}{3T'(x_0)}} + \mathcal{O}\left(|x-x_0|^2\right) \\
&\qquad + \overline{\frac{T'''(x_0)}{6T'(x_0)}(y-x_0)^\perp + |T'|^2(x_0)(y-x_0)^\perp} + \mathcal{O}\left(|y-x_0|^2\right),
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\int |x-x_0|^2\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x &= \int |x-B_\varepsilon(t)|^2\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int (x_0-B_\varepsilon(t))\cdot(x-x_0+x-B_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \int |x-B_\varepsilon(t)|^2\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x + (x_0-B_\varepsilon(t))\cdot(B_\varepsilon(t)-x_0) \\ &\quad + (x_0-B_\varepsilon(t))\cdot(B_\varepsilon(t)-B_\varepsilon(t)) \\ &= \int |x-B_\varepsilon(t)|^2\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x - |x_0-B_\varepsilon(t)|^2.\end{aligned}$$

A la lumière des trois expressions précédentes, on a donc des constantes K_1 et K_2 telles que :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|B_\varepsilon(t)-x_0|^2 &\leq K_1 \iint (|x-x_0|^2+|y-y_0|^2)|B_\varepsilon(t)-x_0|\omega_\varepsilon(x,t)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \frac{T'''(x_0)}{T'(x_0)}K_2|B_\varepsilon(t)-x_0|^2 \\ &\leq 2K_1|B_\varepsilon(t)-x_0| \int (|x-B_\varepsilon(t)|^2+|B_\varepsilon(t)-x_0|^2)\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{T'''(x_0)}{T'(x_0)}K_2|B_\varepsilon(t)-x_0|^2\end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|B_\varepsilon(t)-x_0| \leq 2K_1 I_\varepsilon(t) + 2K_1|B_\varepsilon(t)-x_0|\varepsilon^\beta + \frac{T'''(x_0)}{T'(x_0)}K_2|B_\varepsilon(t)-x_0|,$$

et donc par définition de $K(\varepsilon^\beta)$, on a une constante K_3 telle que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|B_\varepsilon(t)-x_0| \leq K_3(I_\varepsilon(t)+K(\varepsilon^\beta)|B_\varepsilon(t)-x_0|),$$

On applique ici une variante du lemme de Gronwall [4] pour obtenir :

$$|B_\varepsilon(t)-x_0| \leq |B_\varepsilon(0)-x_0|\exp(K_3K(\varepsilon^\beta)t) + K_3\int_0^t I_\varepsilon(s)\exp(K_3K(\varepsilon^\beta)s)\mathrm{d}s,$$

soit d'après (18) qui est déjà démontrée,

$$|B_\varepsilon(t)-x_0| \leq 2\varepsilon\exp(K_3K(\varepsilon^\beta)t) + 4\varepsilon^2\exp(2K(\varepsilon^\beta)t)\frac{1}{K(\varepsilon^\beta)}(\exp(K_3K(\varepsilon^\beta)t)-1).$$

□

4. Ici, on a $f'(t) \leq \alpha f(t) + \beta(t)$, avec $\alpha \geq 0$ et $\beta(t) \geq 0$. On montre alors naturellement que f est plus petite que la solution de l'équation différentielle $y'(t) = \alpha y(t) + \beta(t)$ vérifiant $y(0) = f(0)$. Notons qu'il faut l'appliquer ici à la fonction $f = |B_\varepsilon - x_0|$ en ayant remarqué que $f' \leq |f'| = |\dot{B}_\varepsilon|$.

Ces estimations, éclairées par le lemme 3.6, se simplifient à l'aide de la condition $T'''(x_0) = 0$. Observons de suite ce que l'on obtient alors.

Corollaire 3.8. *Si de plus, $T'''(x_0) = 0$ et $t < \varepsilon^{-\alpha}$ avec $\alpha < \beta$, il existe une constante C_3 telles que les estimations* (18) *et* (19) *puissent alors s'écrire :*

$$I_\varepsilon(t) \leq C_3 \varepsilon^2. \tag{20}$$

et

$$|B_\varepsilon(t) - x_0| \leq C_3 \varepsilon. \tag{21}$$

Démonstration. D'après le lemme 3.6, et avec l'hypothèse $T'''(x_0) = 0$, on a $K(\varepsilon^\beta) = C\varepsilon^\beta$, et puisque $t < \varepsilon^{-\alpha}$ avec $\alpha < \beta$, $t\varepsilon^\beta \leq 1$ dès que $\varepsilon \leq 1$. De plus, $\varepsilon \leq \varepsilon^\beta$. On applique donc le lemme précédent 3.7 et le résultat en découle. □

En particulier, le centre de vorticité B_ε ne peut s'écarter du point x_0 durant le temps $\tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}$ que d'un facteur proportionnel à ε, et le moment d'inertie I_ε est quant à lui contrôlé par ε^2. On a donc ici un bon contrôle des deux premiers moments de la vorticité. L'indice α que nous avons introduit sera par la suite choisi assez petit.

Introduisons la quantité :

$$m_t(h) = \int_{|y-B_\varepsilon|>h} \omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y, \tag{22}$$

qui peut s'interpréter également :

$$m_t(h) = \int_\Omega \mathbb{1}_{|y-B_\varepsilon|>h} \omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y.$$

Afin d'obtenir des estimations sur la quantité $m_t(h)$, introduisons une quantité $\mu_t(h)$ similaire à $m_t(h)$ mais où l'indicatrice est remplacée par une fonction lisse :

$$\mu_t(h) = \int W_h(x - B_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x,$$

où W_h est une fonction régulière positive et radiale vérifiant les trois conditions suivantes :

$$W_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq h \\ 1 & \text{si } |x| \geq 2h \end{cases}$$

$$|\nabla W_h(x)| < \frac{C_1}{h},$$

$$|\nabla W_h(x) - \nabla W_h(y)| < \frac{C_1}{h^2}|x-y|,$$

pour une constante $C_1 > 0$. Les deux quantités $m_t(h)$ et $\mu_t(h)$ vérifient en particulier

$$\mu_t(h) \leq m_t(h) \leq \mu_t(h/2).$$

Lemme 3.9. *On a l'estimation suivante pour tout temps $t < \tau_{\varepsilon,\beta}$:*

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(h)\right| \le \frac{25C_1}{2\pi h^4}I_\varepsilon(t)m_t(h) + \frac{C_1}{h^3}2\|F(t)\|_\infty I_\varepsilon(t)m_t(h) + 3C_1K(\varepsilon^\beta).$$

Démonstration. Calculons :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(h) &= \int \left[-\dot{B}_\varepsilon(t)\cdot\nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(x,t) - W_h(x-B_\varepsilon(t))u\cdot\nabla\omega_\varepsilon(x,t)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int \left[-\dot{B}_\varepsilon(t)\cdot\nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(x,t) + \nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))\cdot u\omega_\varepsilon(x,t)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int \nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))\cdot\left[\int \nabla_x^\perp G_D(x,y)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y - \dot{B}_\varepsilon(t)\right]\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Séparons cette expression en deux termes $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(h) = A_1 + A_2$ que nous traiterons séparément.

Prenons dans le premier terme la partie singulière de G_D :

$$A_1 = \int \nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))\cdot\left[\int \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right]\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x.$$

Le second terme est la partie restante, c'est à dire, puisque la partie singulière de G_D s'écrit $G_D - \gamma$,

$$A_2 = \int \nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))\cdot\left[\int \nabla_x^\perp \gamma(x,y)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y - \dot{B}_\varepsilon(t)\right]\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x.$$

Traitons le premier terme. En utilisant le théorème de Fubini et l'antisymétrie du noyau singulier :

$$A_1 = \frac{1}{2}\iint (\nabla W_h(x-B_\varepsilon(t)) - \nabla W_h(y-B_\varepsilon(t)))\cdot\frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega_\varepsilon(y,t)\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

On introduit les variables $x' = x - B_\varepsilon(t)$ et $y' = x - B_\varepsilon(t)$. Puisque si $|x'| < h$ et $|y'| < h$ alors A_1 est nul, on peut décomposer le domaine d'intégration en trois domaines : $|x'| \ge h$, $|y'| > h$, et retirer le domaine $|x'| > h \cap |y'| > h$ que l'on a compté deux fois. Ainsi, en notant l'intégrande $B(x',y') = (\nabla W_h(x') - \nabla W_h(y'))\cdot\dfrac{(x'-y')^\perp}{2\pi|x'-y'|^2}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)$, on a :

$$A_1 = \iint_{|x'|>h} B(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x' + \iint_{|y'|>h} B(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x' - \iint_{|x'|>h,\ \ |y'|>h} B(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x'.$$

Puisque B est symétrique, les deux premiers termes sont égaux, et l'on peut faire le découpage suivant :

$$A_1 = B_1 + B_2 - B_3$$

avec

$$B_1 = 2\iint_{|x'|>h,\ \ |y'|\le h/2} B(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x',$$

$$B_2 = 2\iint_{|x'|>h,\ \ |y'|>h/2} B(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x'$$

et

$$B_3 = \iint_{|x'|>h,\ \ |y'|>h} B(x',y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}x'.$$

Il vient en utilisant les propriétés de W :

$$|B_2| \leq \frac{C_1}{\pi h^2}\int_{|x'|\geq h}\int_{|y'|>h/2} \omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}y'\mathrm{d}x'.$$

Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $\lambda > 0$:

$$\int_{|y-B_\varepsilon(t)|\geq\lambda} \omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\lambda^2}\int |y-B_\varepsilon(t)|^2\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y,$$

que l'on applique ici pour $\lambda = h/2$ et l'on a donc,

$$|B_2| \leq \frac{4C_1 I_\varepsilon(t)}{\pi h^4} m_t(h).$$

On traite B_3 exactement de la même façon, avec $\lambda = h$, et l'on obtient cette fois :

$$|B_3| \leq \frac{C_1 I_\varepsilon(t)}{2\pi h^4} m_t(h).$$

Pour traiter B_1 remarquons d'abord que sur ce domaine d'intégration, $\nabla W_h(y') = 0$. De plus, puisque W_h est radiale, il existe $\eta_h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\nabla W_h(x) = \eta_h(|x|)\dfrac{x}{|x|}$. On a donc :

$$B_1 = 2\iint_{|x'|>h,\ \ |y'|\leq h/2} \eta_h(|x'|)\frac{x'}{|x'|}\cdot\frac{(x'-y')^\perp}{2\pi|x'-y'|^2}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'. \quad (23)$$

Pour traiter ce terme, remarquons d'abord que $x'\cdot(x'-y')^\perp = -x'\cdot y'^\perp$. Ensuite, écrivons :

$$\frac{1}{|x'-y'|^2} = \frac{|x'-y'+y'|^2}{|x'-y'|^2|x'|^2} = \frac{|x'-y'|^2+2y\cdot(x'-y')+|y'|^2|}{|x'-y'|^2|x'|^2} = \frac{1}{|x'|^2} + \frac{y'\cdot(2x'-y')}{|x'-y'|^2|x'|^2},$$

de sorte que $B_1 = D_1 + D_2$ avec

$$D_1 = 2\iint \eta_h(|x'|)\frac{-x'\cdot y'^\perp}{2\pi|x'|^3}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

et

$$D_2 = 2\iint \eta_h(|x'|)\frac{(-x'\cdot y'^\perp)y'\cdot(2x'-y')}{2\pi|x'-y'|^2|x'|^3}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',$$

où le domaine d'intégration est le même que précédemment.

Puisque $|x'| > h$, et $|y'| < h/2$, alors d'une part $|x'-y'| \geq h/2$ et d'autre part $|x'| \leq 2|x'-y'|$ et donc $|2x'-y'| \leq |x'+y'| + |x'| \leq 3|x'-y'|$, de sorte que

$$|D_2| \leq \frac{C_1}{h\pi} \iint \frac{3}{h/2} \frac{|y'|^2}{h^2} \omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

Par les définitions de $m_t(h)$ et $I_\varepsilon(t)$, il vient $|D_2| \leq \dfrac{6C_1}{\pi h^4} I_\varepsilon(t) m_t(h)$.

Il est clair que :

$$\int_{y'\in\Omega} y'^{\perp}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}y' = \left(\int_{y\in\Omega}(y-B_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right)^{\perp} = 0,$$

et donc :

$$D_1 = -2\iint_{|x'|>h, |y'|>h/2} \eta_h(|x'|)\frac{-x'\cdot y'^{\perp}}{2\pi|x'|^3}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\omega_\varepsilon(x'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$\begin{aligned}\int_{|y'|>h/2} |y'|\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}y' &\leq \left(I_\varepsilon(t)\int_{|y'|>h/2}\omega_\varepsilon(y'+B_\varepsilon(t),t)\mathrm{d}y'\right)^{1/2}\\ &\leq \frac{2I_\varepsilon(t)}{h}.\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$|D_1| \leq \frac{2C_1}{\pi h^4} I_\varepsilon(t) m_t(h),$$

de sorte que

$$|B_1| \leq \frac{8C_1}{\pi h^4} I_\varepsilon(t) m_t(h), \tag{24}$$

et donc

$$|A_1| \leq \frac{25C_1}{2\pi h^4} I_\varepsilon(t) m_t(h).$$

Le second terme quant à lui s'écrit :

$$A_2 = \int \nabla W_h(x-B_\varepsilon(t)) \cdot \int \left[F(x,t) - F(y,t)\right]\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x.$$

On peut cette fois réduire le domaine d'intégration comme suit :

$$A_2 \leq \int_{h\leq|x-B_\varepsilon(t)|\leq 2h} |\nabla W_h(x-B_\varepsilon(t))| \int |F(x,t)-F(y,t)|\,\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\omega_\varepsilon(x,t)\mathrm{d}x.$$

Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ assez petit, ω_ε a un support dont la distance au bord est majoré par une constante strictement positive indépendante de ε, et ainsi F est majoré par une constante indépendante de ε. On a donc :

$$|A_2| \leq \frac{C_1}{h} 2\|F(t)\|_\infty \int_{h\leq|x'|\leq 2h} \int_{|y'|\geq h} \omega_\varepsilon(y' + B_\varepsilon(t), t)\mathrm{d}y\omega_\varepsilon(x' + B_\varepsilon(t), t)\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{C_1}{h} K(\varepsilon^\beta) \int_{h\leq|x'|\leq 2h} \int_{|y'|\leq h} |x' - y'|\omega_\varepsilon(y' + B_\varepsilon(t), t)\mathrm{d}y\omega_\varepsilon(x' + B_\varepsilon(t), t)\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour le premier terme, et en remarquant que $\displaystyle\int_{|y'|\leq h} |x' - y'|\omega_\varepsilon(y' + B_\varepsilon(t), t)\mathrm{d}y \leq 3h$ lorsque $|x'| \leq 2h$, on obtient :

$$|A_2| \leq \frac{C_1}{h^3} 2\|F(t)\|_\infty I_\varepsilon(t)m_t(h) + 3C_1K(\varepsilon^\beta).$$

En conclusion,

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(h)\right| \leq \frac{25C_1}{2\pi h^4} I_\varepsilon(t)m_t(h) + \frac{C_1}{h^3} 2\|F(t)\|_\infty I_\varepsilon(t)m_t(h) + 3C_1K(\varepsilon^\beta).$$

□

Une nouvelle fois, cette estimations va prendre différentes formes suivant que l'on rajoute les hypothèses $T'''(x_0) = 0$ et $t < \varepsilon^{-\alpha}$. Notons de suite ce que l'on obtient dans ce dernier cas :

Corollaire 3.10. *Si $T'''(x_0) = 0$, il existe α assez petit tel que l'on ait pour tout $l > 0$ et pour tout $\forall t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$:*

$$\varepsilon^{-l} m_t(\varepsilon^\beta) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad .$$

Démonstration. Pour $t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$ avec $\alpha < \beta$, on obtient finalement :

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t(h)\right| \leq A(h)m_t(h) \leq A(h)\mu_t(h/2),$$

avec $A(h) = C_2 \left(\dfrac{\varepsilon^2}{h^4} + \dfrac{\varepsilon^2}{h^3} + \varepsilon^\beta\right)$.

Fixons β^* tel que $\beta < \beta^* < 1/2$. Pour tout $h \geq \varepsilon^{\beta^*}$ on a :

$$A(h) \leq 3C_2\varepsilon^\eta,$$

dès que $\eta \leq \min\{\beta, 2 - 4\beta^*\}$.

Il vient alors que $\mu(t) \leq \mu_0(h) + 3C_2\varepsilon^\eta \displaystyle\int_0^t \mu_s(h/2)\mathrm{d}s$, qui peut être itéré n fois si $h \geq 2^n\varepsilon^{\beta^*}$, ce qui donne par récurrence, pour tout $k \leq n$:

$$\mu_t(h) \leq \sum_{j=0}^{k} \mu_0(2^{-j}h)\frac{(3C_2\varepsilon^\eta t)^j}{j!} + \frac{(3C_2\varepsilon^\eta)^{k+1}}{k!} \int_0^t (t-s)^k \mu_s(2^{-(k+1)}h)\mathrm{d}s.$$

En effet, prouvons l'hérédité : si ceci est vrai pour $k < n$, alors

$$\mu_t(h) \leq \sum_{j=0}^{k} \mu_0(2^{-j}h) \frac{(3C_2\varepsilon^\eta t)^j}{j!} + \frac{(3C_2\varepsilon^\eta)^{k+1}}{k!} \int_0^t (t-s)^k \left(\mu_0(h) + 3C_2\varepsilon^\eta \int_0^s \mu_\tau(2^{-(k+2)}h)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s,$$

$$\mu_t(h) \leq \sum_{j=0}^{k+1} \mu_0(2^{-j}h) \frac{(3C_2\varepsilon^\eta t)^j}{j!} + \frac{(3C_2\varepsilon^\eta)^{k+2}}{k!} \int_0^t (t-\tau)^k \int_0^s \mu_\tau(2^{-(k+2)}h)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

et en inversant les intégrales par le théorème de Fubini, on obtient :

$$\mu_t(h) \leq \sum_{j=0}^{k+1} \mu_0(2^{-j}h) \frac{(3C_2\varepsilon^\eta t)^j}{j!} + \frac{(3C_2\varepsilon^\eta)^{k+2}}{(k+1)!} \int_0^t (t-\tau)^{k+1} \mu_\tau(2^{-(k+2)}h)\mathrm{d}\tau.$$

En particulier, on a donc

$$\mu_t(h) \leq \sum_{j=0}^{n} \mu_0(2^{-j}h) \frac{(3C_2\varepsilon^\eta t)^j}{j!} + \frac{(3C_2\varepsilon^\eta)^{n+1}}{n!} \int_0^t (t-s)^n \mu_s(2^{-(n+1)}h)\mathrm{d}s.$$

Mais $2^{-j}h \geq \varepsilon^{\beta^*} > \varepsilon$, et donc $\mu_0(2^{-j}h) = 0$, pour tout $j \leq n$. Enfin, $\mu_s \leq 1$ et en prenant $t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$, on a :

$$\mu_t(h) \leq \frac{(3C_2\varepsilon^{\eta-\alpha})^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{25}$$

On pose maintenant $h = \varepsilon^\beta$, $n = \lfloor (\beta^* - \beta) \log_2 |\varepsilon| \rfloor$. On a alors lorsque ε tend vers 0, n tend vers l'infini et donc quel que soit $l > 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-l} \frac{(3C_2\varepsilon^{\eta-\alpha})^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{\exp\left((n+1)\ln(3C_2\varepsilon^{\eta-\alpha}) - l\ln(\varepsilon)\right)}{(n+1)!} \\ &= \frac{\exp\left((n+1)\ln(3C_2) + (n+1)\ln(\varepsilon)(\eta-\alpha) - l\ln(\varepsilon)\right)}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Puisque ε tend vers 0 et n tend vers l'infini, il vient que pour $\alpha < \eta$, et quel que soit $l > 0$,

$$\varepsilon^{-l}\mu_t(\varepsilon^\beta) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or $\mu_t(h) \leq m_t(h) \leq \mu_t(h/2)$. Ainsi, pour tout $\beta < 1/2$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\varepsilon^{-l} m_t(\varepsilon^\beta) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}].$$

$\square$

Pour décrire le temps nécessaire au blob de vorticité pour sortir du disque de rayon ε^β autour de x_0 il est naturel d'introduire également

$$R_t = \inf\{r, \operatorname{supp} \omega_\varepsilon(t) \subset D(B_\varepsilon(t), r)\}, \tag{26}$$

qui décrit la localisation au temps t du support de ω_ε, et l'on considère $t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$ et x_1 tel que $|x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| = R_t$, où $x(\cdot,\cdot)$ est ici le flot de l'équation, c'est à dire que $x(y,t)$ est la position de la particule issue de y à l'instant initial après un temps t d'évolution.

On a alors :

Lemme 3.11. *Avec les notations et conditions précédentes et en supposant qu'il existe M et $\nu > 0$ tels que $|\omega_{0,\varepsilon}| \leq M\varepsilon^{-\nu}$, si $|x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| = R_t$, alors :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| \leq 2K(\varepsilon^\beta)R_t + \frac{4}{\pi R_t^3} I_\varepsilon(t) + \sqrt{\frac{M\varepsilon^{-\nu} m_t(R_t/2)}{\pi}}.$$

Démonstration. Naturellement, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(x_1,t) = u(x(x_1,t),t)$, et l'on a donc en notant $x = x(x_1,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x - B_\varepsilon(t)| &= u(x,t) \cdot \frac{x - B_\varepsilon(t)}{|x - B_\varepsilon(t)|} \\
&= \left[\int \left(F(x,t) + \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} - F(y,t)\right)\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right] \cdot \frac{x - B_\varepsilon(t)}{|x - B_\varepsilon(t)|}.
\end{aligned}$$

On a d'une part,

$$\begin{aligned}
|H_3| := \left|\int (F(x,t) - F(y,t))\,\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right| &\leq K(\varepsilon^\beta)\int |x-y|\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y \\
&\leq K(\varepsilon^\beta) 2R_t.
\end{aligned}$$

Notons la seconde partie :

$$\left[\int \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right] \cdot \frac{x - B_\varepsilon(t)}{|x - B_\varepsilon(t)|} = H_1 + H_2,$$

où H_1 et H_2 sont obtenus en séparant le domaine d'intégration en les domaines $E_1 = D(B_\varepsilon(t), R_t/2)$ et $E_2 = D(B_\varepsilon(t), R_t) \setminus E_1$, c'est à dire pour $i \in \{1,2\}$:

$$H_i = \left[\int_{E_i} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right] \cdot \frac{x - B_\varepsilon(t)}{|x - B_\varepsilon(t)|}.$$

En faisant le changement de variables $x' = x - B_\varepsilon(t)$ et $y' = x - B_\varepsilon(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left[\int_{|y'|<R_t/2} \frac{(x'-y')^\perp}{2\pi|x'-y'|^2}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y\right] \cdot \frac{x'}{|x'|} \\
&= \int_{|y'|<R_t/2} \frac{-x' \cdot y'^\perp}{2\pi|x'-y'|^2|x'|}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

ce qui n'est pas sans rappeler le terme (23). En effet, en sortant $\eta_h(|x'|)\omega_\varepsilon(x' + B_\varepsilon(t), t)$ de l'intégrale en y', on obtient exactement la même intégrale en y. On traite donc cette intégrale exactement de la même façon, de sorte que l'on a :

$$|H_1| \leq \frac{4}{\pi R_t^3} I_\varepsilon(t).$$

Les différences par rapport à la majoration (24) viennent précisément de l'absence du terme $\eta_h(|x'|)$ qui contribuait en $\frac{C_1}{h}$, l'intégrale en x qui apportait le terme $m_t(h)$, et enfin le rapport 2 qui était présent dans le terme B_1.

On a par ailleurs

$$|H_2| = \int_{E_i} \frac{1}{2\pi|x-y|}\omega_\varepsilon(y,t)\mathrm{d}y.$$

Sans tenir compte de la vorticité, l'intégrande du terme H_2 est bien entendu maximal proche de la singularité $y = x$. Ainsi, la valeur de l'intégrale est maximale si la vorticité est concentrée autour de la singularité. Puisque $|\omega_{0,\varepsilon}| \leq M\varepsilon^{-\nu}$, et donc $|\omega_\varepsilon(t)| \leq M\varepsilon^{-\nu}$ pour tout temps t, la façon de concentrer au maximum la vorticité est de prendre $\omega_\varepsilon(t) = M\varepsilon^{-\nu}\delta_{|x-y|\leq r}$, où r est choisi tel que $M\varepsilon^{-\nu}r^2 = m_t(R_t/2)$, de sorte que la vorticité totale soit bien $m_t(R_t/2)$,ce qui est le maximum possible dans notre cas. On a alors :

$$|H_2| \leq \frac{M\varepsilon^{-\nu}}{2\pi}\int_{D(0,r)} \frac{1}{|y|}\mathrm{d}y,$$

c'est à dire

$$|H_2| \leq \sqrt{\frac{M\varepsilon^{-\nu}m_t(R_t/2)}{pi}}.$$

Puisque $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x - B_\varepsilon(t)| = H_1 + H_2 + H_3$, le lemme est prouvé.

□

Un nouvelle fois, intégrons la condition $T'''(x_0) = 0$ et $t < \varepsilon^{-\alpha}$, ainsi que les lemmes précédents.

Corollaire 3.12. *En reprenant les hypothèses du lemme 3.11 précédent, et en rajoutant les hypothèses $T'''(x_0) = 0$ et $t < \varepsilon^{-\alpha}$, on a alors :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| \leq 2C\varepsilon^\beta R_t + \frac{4C_3}{\pi R_t^3}\varepsilon^2 + \sqrt{\frac{M\varepsilon^{-\nu}m_t(R_t/2)}{\pi}}.$$

Démonstration. On applique le lemme 3.11, puis il s'agit simplement d'appliquer le lemme 3.6 pour expliciter $K(\varepsilon^\eta)$, ainsi que l'inégalité (20) du corollaire 3.8 pour majorer $I_\varepsilon(t)$. □

On peut maintenant procéder à la démonstration du théorème 3.5.

3.2.2 Preuve du théorème 3.5

Démonstration. On se place dans le cadre des hypothèses du théorème, c'est à dire que Ω, T et x_0 sont choisis comme au paragraphe 3.1. On suppose de plus que $T'''(x_0) = 0$.

On considère $t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$ où $\alpha < \beta$, de sorte que le corollaire 3.12 s'applique.

On a donc pour toute particule telle que $|x(x_1, t) - B_\varepsilon(t)| = R_t$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| \leq 2C\varepsilon^\beta R_t + \frac{4C_3}{\pi R_t^3}\varepsilon^2 + \sqrt{\frac{M\varepsilon^{-\nu} m_t(R_t/2)}{\pi}}.$$

Ceci implique que $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon(t) \subset D(B_\varepsilon, R(t))$ avec :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) = 2C\varepsilon^\beta R(t) + \frac{4C_3\varepsilon^2}{\pi R(t)^3} + \sqrt{\frac{M\varepsilon^{-\nu} m_t(R(t)/2)}{\pi}},$$

avec $R(0) = \varepsilon$. En effet, ceci est vrai pour $t = 0$, et à tout temps, si une particule atteint la frontière de $D(B_\varepsilon, R(t))$, alors $R(t) = |x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| = R_t$, et donc la vitesse radiale de $x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)$ est plus petite que $\dot{R}(t)$.

Soit $\beta < \beta' < \beta_* < 1/2$. Montrons par l'absurde que quel $t < \varepsilon^{-\alpha}$, $R(t) < \varepsilon^{\beta'}$. Supposons qu'il existe $t_1 \in [0, \varepsilon^{-\alpha}]$ tel que $R(t_1) = \varepsilon^{\beta'}$, et considérons alors $t_0 < t_1$ tel que $R(t_0) = \varepsilon^{\beta_*}$ et $\forall t \in [t_0, t_1], R(t) \geq \varepsilon^{\beta_*}$. Ainsi d'après le corollaire 3.10, pour α assez petit, on a une constante C_4 telle que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) \leq 2C\varepsilon^\beta R(t) + C_4\varepsilon^{2-3\beta_*},$$

de sorte que

$$R(t_1) \leq \exp(2C\varepsilon^\beta(t_1 - t_0))(R(t_0) + (t_1 - t_0)C_4\varepsilon^{2-3\beta_*}),$$

et donc

$$R(t_1) \leq \exp(2C\varepsilon^{\beta-\alpha})(\varepsilon^{\beta'} + C_4\varepsilon^{2-3\beta_*-\alpha}).$$

Puisque $3 - 2\beta_* > \beta'$, il existe α assez petit, et ε' tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon']$, $R(t_1) < \varepsilon^{\beta'}$ ce qui est absurde.

Par conséquent, quel que soit $\beta' < 1/2$, il existe donc $\varepsilon \in [0, \varepsilon']$, $R(t) < \varepsilon^{\beta'}$ pour tout $t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$.

Puisque l'on a de plus par le corollaire 3.8 :

$$|B_\varepsilon(t) - x_0| \leq C_3\varepsilon,$$

et que $\varepsilon = o(\varepsilon^\beta)$ et $\varepsilon^{\beta'} = o(\varepsilon^\beta)$, on a donc inclusion du support de ω dans le disque $D(x_0, \varepsilon^\beta)$ pour ε assez petit.

On a donc que quel que soit $\beta < 1/2$, il existe $\alpha > 0$ assez petit et ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon(t) \subset D(x_0, \varepsilon^\beta)$ pour tout $t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \varepsilon^{-\alpha}]$, ce qui par continuité, implique que $\tau_{\varepsilon,\beta} > \varepsilon^{-\alpha}$ et prouve le théorème pour $\xi = \alpha$. □

3.2.3 Esquisse de preuve du théorème 3.4

Le théorème 3.4 a une hypothèse en moins, ce qui nous empêche d'appliquer les corollaires 3.8 et 3.10 tels quels. Ceci est compensé par le résultat moins fort que l'on recherche : on suppose cette fois non plus que $t < \varepsilon^{-\alpha}$, mais que $t < \alpha|\log \varepsilon|$. On peut donc appliquer le même schéma de preuve.

Tout d'abord, la quantité $K(\varepsilon^\beta)$ définie au lemme 3.6 est cette fois seulement majorée par une constante que nous noterons K. La condition $t < \alpha|\log \varepsilon|$ permet d'utiliser le lemme 3.7 pour obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 3.13. *Pour $t < \alpha|\log \varepsilon|$, on a :*

$$I_\varepsilon(t) \leq 4\varepsilon^{2-K\alpha}.$$

Le même raisonnement s'applique alors pour le corollaire 3.10, qui s'obtient à partir du lemme 3.9 et du corollaire précédent, cette fois $A(h)$ ne se majore que par une constante, mais l'hypothèse $t < \alpha|\log \varepsilon|$ permet d'obtenir la convergence vers 0 dans l'équation (25) (où ε^η est remplacé par une constante), et l'on obtient le corolaire suivant.

Corollaire 3.14. *Il existe α assez petit tel que l'on ait pour tout $l > 0$ et pour tout $\forall t \in [0, \tau_{\varepsilon,\beta} \wedge \alpha|\log \varepsilon|]$:*

$$\varepsilon^{-l} m_t(\varepsilon^\beta) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad .$$

Enfin, le lemme 3.11 s'applique directement, et en majorant $I_\varepsilon(t)$ cette fois à l'aide du corollaire 3.13, on obtient cette fois :

Corollaire 3.15. *En reprenant les hypothèses du lemme 3.11, et en rajoutant l'hypothèse $t < \alpha|\log \varepsilon|$, on a alors :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x(x_1,t) - B_\varepsilon(t)| \leq 2CKR_t + \frac{4C_3}{\pi R_t^3} 4\varepsilon^{2-K\alpha} + \sqrt{\frac{M\varepsilon^{-\nu} m_t(R_t/2)}{\pi}}.$$

Les démonstrations de ces corollaires ainsi que la démonstration peuvent être directement déduites de celles présentes dans l'article [BM18], puisque la nature du domaine Ω n'intervient pas dans ces preuves.

3.3 Discussion

Une question naturelle soulevée par ces résultats est la nature de la condition $T'''(x_0) = 0$, ainsi que la valeur de l'exposant ξ. Pour ce dernier point, α est choisi au corollaire 3.10 assez petit pour satisfaire une certain propriété, ce qui peut nous amener à obtenir ξ très proche de 0, et donc en pratique une borne assez mauvaise pour notre théorème.

Pour le second point, un calcul direct montre que :

$$\begin{cases} (T^{-1})'(0) = \dfrac{1}{T'(x_0)} \\ (T^{-1})''(0) = -\dfrac{T''(x_0)}{T'(x_0)^3} \\ (T^{-1})'''(0) = \dfrac{T'''(x_0)T'(x_0) - 3T''(x_0)^2}{T'(x_0)^5}, \end{cases}$$

dès que $T(x_0) = 0$, et T est un biholomorphisme. Ainsi, puisqu'alors $T'(x_0) \neq 0$, il vient directement que $T''(x_0) = 0 \Longleftrightarrow (T^{-1})''(0) = 0$ et dans ce cas $T'''(x_0) = 0 \Longleftrightarrow (T^{-1})'''(0) = 0$. Les domaines Ω qui vérifient donc l'existence du biholomorphisme T qui nous intéressent sont donc les images du disque unité par les biholomorphismes $f = T^{-1}$ tels que $f''(0) = f'''(0) = 0$. La fonction f s'écrit donc $f(z) = x_0 + f'(0)z + \sum_{n\geq 4} a_n z^n$.

Puisque les domaines bornés possèdent toujours un extremum local de la fonction $\tilde{\gamma}$, puisque celle-ci diverge au bord (*cf.* [Gus79]), on peut toujours choisir x_0 et T de sorte que $T(x_0) = 0$ et $T''(x_0) = 0$. En revanche, la condition $T'''(x_0) = 0$ semble non triviale, et nous ne savons mieux décrire l'ensemble des domaines satisfaisant l'existence de T et x_0 comme au paragraphe 3.1, que comme l'ensemble des images du disque par les applications f décrites au dessus, ce qui permet d'en construire, mais pas de décider si un domaine fixé est un bon candidat.

Références

[BM18] P. Buttà et C. Marchioro : Long time evolution of concentrated euler flows with planar symmetry. *SIAM J. Math. Anal. 50, pp. 735-760.*, 2018.

[Gus79] B. Gustafsson : *On the Motion of a Vortex in Two-dimensional Flow of an Ideal Fluid in Simply and Multiply Connected Domains.* Trita-MAT. ?, 1979.

[Ift04] Dragoș Iftimie : Large time behavior in perfect incompressible flows. <cel-00376452>, Lanzhou (Chine), pp.73, 2004.

[MP93a] C. Marchioro et M. Pulvirenti : *Mathematical Theory of Incompressible Non-viscous Fluids.* Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1993.

[MP93b] Carlo Marchioro et Mario Pulvirenti : Vortices and localization in euler flows. *Comm. Math. Phys.*, 154(1):49–61, 1993.