# Mouvement Brownien, calcul d'Itô, et équations paraboliques

Rapport de Stage
Donati Martin, encadré par Graham Carl
CMAP (Ecole Polytechnique, CNRS)

15 mai - 7 juillet 2017

**Résumé**

L'objectif de cette étude est de dresser un lien entre des solutions d'équations différentielles stochastiques et des solutions d'équations aux dérivées partielles paraboliques. Pour cela, nous introduirons le mouvement brownien et plus généralement les outils probabilistes pour décrire les processus stochastiques. Une fois la formule d'Itô établie, nous pourrons démontrer le théorème fondamental liant les deux types d'équations étudiées. Enfin, nous nous intéresserons à des applications, en particulier la diffusion de Wright Fisher, pour comprendre comment ce lien peut être exploité. Le rapport commence par une étude historique du mouvement brownien, afin d'en retracer une génèse fidèle.

**Notations.** On note $\lambda_d$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie les conditions habituelles [1]. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus aléatoire, on note $K(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ sa fonction de covariance. Si $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x| = \|x\|_{l^2(\{1,\dots,d\})}$, et si $V \subset \mathbb{R}^d$ mesurable, $|V| = \lambda_d(V)$.

Lorsque $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus aléatoire, on note $X_t^x$ le processus vérifiant $X_0 = x$. Un mouvement brownien issu de 0 sera noté simplement $B_t$. On note $\mathbb{E}_x[X_t] := \mathbb{E}[X_t^x]$.

Une grande partie des notions abordées ci-après sont introduites dans [LG13], dont nous reprendrons la construction.

# 1 Histoire et construction du mouvement brownien

## 1.1 Description historique

Robert Brown (1773-1858), biologiste écossais, publie en 1828 : *A brief account of microscopical observations and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, [Bro28]. Il y fait l'observation de particules fines issues de plantes qui, plongées dans un fluide sont alors animées d'un mouvement chaotique. Imputant naturellement ce mouvement à la nature vivante des cellules végétales, il vérifie tout de même cette hypothèse en répétant ses expériences avec des plantes séchées, conservées depuis des dizaines d'années en bon état.

Ses résultats sont alors très nets quant au fait que le mouvement apparaît en toutes circonstances, quelle que soit la nature des grains observés. Avec une démarche très

1. Qui est continue à droite, et qui contient les négligeables. Voir [LG13].

rigoureuse, il réalise l'expérience sur de très nombreux matériaux, et conclut que le mouvement n'est donc pas d'origine vivante. Il écarte également l'idée que la cause puisse être l'évaporation du fluide ou une quelconque raison autre que la simple immersion des particules dans le fluide. De plus, durant le procédé, il sépare la matière en de très fines particules, de forme sphérique, de taille relativement similaires entre elles, et animées d'un mouvement comparable lorsque plongées dans l'eau. Il interprète ces résultats comme un appui majeur de la théorie des *molécules* comme constituant élémentaire de la matière.

Enfin, il remarque également l'influence de la taille de la particule : les plus grosses (lorsque non séparées au maximum) sont animées d'un mouvement beaucoup moins visible. Il mentionne dans son article que de telles observations ont déjà été partiellement menées, mais juge son expérience beaucoup plus rigoureuse et précise, bien qu'il regrette de n'être capable de donner de mesure précise aux molécules. Toutefois, il ne donne qu'une très brève description du mouvement, le qualifiant seulement deux fois de *"rapid oscillatory motion"*.

C'est plus d'un demi-siècle plus tard que les notions essentielles relatives à ce mouvement vont être comprises par Albert Einstein : il écrit en 1905 : *On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*[2], [Ein05]. Dans cet article, Einstein calcule diverses grandeurs, comme la pression dans un fluide, à l'aide d'outils de physique statistique, provenant de la théorie cinétique moléculaire de la chaleur. Il met également en évidence que la densité de particules dans un fluide vérifie l'équation de la chaleur.

Celle-ci étant résolue explicitement, il peut alors en déduire des propriétés statistiques sur les particules : notamment, il établit que le déplacement quadratique moyen [3] des particules est proportionnel à la racine carrée du temps écoulé, et il établit plusieurs formules explicites pour le coefficient de diffusion, le déplacement moyen d'une particule dans un temps donné ou encore le nombre d'Avogadro, à l'aide de données statistiques. Ainsi, il en déduit une nouvelle manière expérimentale de mesurer ces grandeurs, et entre autres, de déterminer le nombre d'Avogadro et la taille des atomes. C'est donc une avancée majeure pour la physique, à cette époque, qui a contribué grandement, avec ses autres publications de 1905, à la réputation immense d'Albert Einstein.

Dans cet article, on peut constater que de nombreux termes sont apparus depuis les observations de Brown : les mouvements des particules sont supposés *"unabhangig"* (indépendants) les uns des autres, et il écrit : *"es werden auch die Bewegungen eines und desselben Teilchen in verschiedenen zeitintervallen als voneinander unabhangige vorgange aufzufassen sein"*, dont une traduction proposée est : *"the motions of the same particle in different time intervals must also be considered as mutually independent processes"*.

Quelques années auparavant, en 1900, le mathématicien français Louis Bachelier défendait sa thèse intitulée : *Théorie de la Spéculation* [Bac00]. Cette thèse, seulement lue et reconnue des années plus tard, est pourtant un travail précurseur pour la théorie du mouvement brownien. En voici une portion de l'introduction :

*"Il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant*

2. Traduction proposée par la Princeton University Press sur : http ://press.princeton.edu/einstein.
3. La norme $L^2$ du processus au temps $t$.

*donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité peut s'évaluer mathématiquement. La recherche d'une formule qui l'exprime ne paraît pas jusqu'à ce jour avoir été publiée ; elle sera l'objet de ce travail."*

Bachelier introduit une grande partie du vocabulaire mathématique relatif au mouvement brownien : probabilité, espérance et indépendance dans un contexte d'application à la finance. Il établit que dans des conditions idéalistes de la bourse, la densité de probabilité du cours vérifie l'équation de la chaleur. Il écrit donc avant Einstein la plupart des propriétés essentielles du mouvement brownien, comme celle du déplacement quadratique moyen. Cependant, son travail manque de rigueur mathématique [4] et ses travaux ne seront reconnus que bien plus tard. De plus, ni Bachelier, ni Poincaré, probablement un des seuls à avoir lu la thèse de Bachelier avant 1905 [5] (et même bien après), ne semblent faire le lien avec l'expérience de Brown et les mouvements aléatoires des particules en suspension. Ainsi, Einstein sera considéré comme le premier à avoir écrit les équations mathématiques du mouvement brownien, alors que lui-même ne fait que mentionner la possibilité que le mouvement prédit par sa théorie soit semblable au *"Brownschen Molekularbewegung"*.

En 1909, Jean Perrin publie *Mouvement Brownien et réalité moléculaire*, [Per09], dans lequel le lien entre Brown et Einstein est clairement fait : le terme *mouvement brownien* est employé sans ambiguïté et Perrin présente bon nombre de calculs et d'expériences confirmant le travail d'Einstein (décrédité à l'époque [6]), prouvant le lien avec le mouvement brownien et les molécules, et y apportant beaucoup de précisions. Il a une parfaite connaissance des travaux expérimentaux de Brown et de l'allemand Christian Wiener réalisés avant lui et lie donc le théorique à l'expérimental.

Un autre mathématicien du même nom, Norbert Wiener (1894-1964), américain, écrit en 1923 : *Differential-Space*, [Wie23], et semble être le premier après Bachelier à employer le calcul des probabilités [7] au service de l'étude du mouvement brownien. Contrairement à Bachelier avant lui, Wiener a pu lire Einstein et Perrin et traite donc bel et bien du *Brownian Movement.* Dans son texte apparaît la notion de distribution gaussienne pour la probabilité de présence d'une particule. Il est le premier à construire une mesure sur l'ensemble des fonctions continues, mesure qui porte son nom, créant ainsi un véritable objet mathématique pour décrire le mouvement brownien. Il manipule les trajectoires continues mais non dérivables comme a pu le suggérer Perrin [8]. On peut donc affirmer que Wiener construit rigoureusement le processus stochastique que l'on appelle aujourd'hui *mouvement brownien*, ou encore *processus de Wiener* en son honneur.

Par la suite, les probabilités gagnent en popularité dans la communauté mathéma-

4. Voir par exemple les paroles rapportées de Lévy, [Taq01].
5. Voir [Taq01].
6. Selon les mots de Perrin [Per09].
7. Il cite d'ailleurs le *Calcul des probabilités* de Poincaré comme référence.
8. Wiener écrit dans [Wie23], en faisant référence à [Per09] : *"This motion is of such an irregular nature that Perrin says of it :* "One realizes form such examples how near the mathematicians are to the truch in refusing, by a logical instrinct, to admit the pretended goemetrical demonstrations, wich are regarded as experimental evidence for the existence of a tangent at each point of a curve"*. It hence becomes a matter of interest to the mathematician to discover what are the defining conditions and properties of these particle paths".*

ticienne et lorsque Paul Lévy publie en 1948 : Processus stochastique et mouvement brownien, réédité et complété en 1965 ([LL65]), les propriétés mathématiques fondamentales du mouvement brownien sont bien mieux comprises et intégrées à la littérature, avec en particulier les différentes caractérisations du mouvement brownien parmi les processus stochastiques.

De nombreux textes ont été écrits sur la genèse historique du mouvement brownien, et le lecteur curieux est encouragé à la lecture de [Taq01] et [Kah96].

## 1.2 Propriétés nécessaires du mouvement brownien

Essayons donc de formaliser mathématiquement les diverses propriétés que le mouvement brownien doit vérifier afin de satisfaire les descriptions physiques qui en ont été faites.

Il s'agit de définir un processus stochastique. Nous pouvons l'interpréter de deux manières différentes : d'abord en spécialisant par rapport au temps, c'est à dire en donnant une collection $(B_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires réelles sur un espace commun $\Omega$. Mais l'on peut aussi le voir comme une variable aléatoire $B$ sur $\Omega$ à valeur dans l'espace des fonctions réelles sur $[0,\infty[$. Par la suite, nous utiliserons indifféremment l'une où l'autre des visions en désignant par $B_t(\omega)$ la réalisation de la variable $B_t$ ou la valeur de $B(\omega)$ en $t$.

Comme nous l'avons vu, la première propriété qui est demandée pour le mouvement brownien est la propriété d'accroissements indépendants et stationnaires. En langage des probabilités, on demande donc en particulier que la variable aléatoire $B_{t+s}-B_t$ soit indépendante de $B_t$ et de même loi que $B_s$, quels que soient $t$ et $s$ positifs. Essayons de caractériser la loi $\mathbb{P}_t$ que doit suivre la variable $B_t$.

Puisque les variables $B_{t+s}-B_t$ et $B_t$ sont indépendantes, la loi de leur somme $B_{t+s}$ est donc le produit de convolution des lois de $B_s$ et $B_t$, ce que l'on peut écrire :

$$\mathbb{P}_{t+s} = \mathbb{P}_s * \mathbb{P}_t,$$

et donc la famille $(\mathbb{P}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de convolution. En passant en Fourier, c'est à dire en étudiant les fonctions caractéristiques $\Phi_t(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi B_t}\right]$, on obtient la relation :

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s.$$

Ceci implique en particulier :

$$\Phi_t = \Phi_{t/n}^n,$$

ce qui revient à dire que $\mathbb{P}_t$ est nécessairement une loi infiniment divisible. Les lois infiniment divisibles sont étroitement liées aux lois stables (proposition A.2), et la seule loi stable ayant une variance finie est la loi normale ; cependant, nous n'avons pas ici les moyens d'affirmer que la loi de $B_t$ est stable.

Pour obtenir la loi du processus, c'est la continuité des trajectoires qui joue un rôle essentiel grâce au théorème A.5 donné en annexe, qui affirme qu'un tel processus, dès lors qu'il a des trajectoires presque sûrement continues, est un processus gaussien. Sa variance s'obtient directement puisque l'on a : $\mathbb{V}[B_{t+s}] = \mathbb{V}[B_{t+s}-B_t] + \mathbb{V}[B_t] = \mathbb{V}[B_s] + \mathbb{V}[B_t]$. La fonction $t \mapsto \mathbb{V}[B_t]$ est donc additive. Par le même théorème A.5 elle est continue, et il vient alors qu'elle est linéaire. Le même constat est immédiat pour son espérance, et donc il est naturel de chercher à construire le mouvement brownien de sorte que $B_t \sim \mathcal{N}(bt, \sigma^2 t)$. Un mouvement brownien standard (celui que l'on va construire), correspondra au cas où $b = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

Remarquons de plus que, si l'on supposait au départ que le mouvement brownien suit une distribution normale à un instant donné, disons $B_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors par le théorème de Lévy-Cramér[9], et la propriété d'accroissements indépendants, puisque $B_1 - B_t$ est indépendante de $B_t$ si $t < 1$, et que leur somme suit une loi normale, c'est que $B_t$ suit une loi normale également. La propriété d'accroissements stationnaires conclut alors que le mouvement brownien est un processus gaussien.

Avec toutes ces considérations, l'objectif va donc être de construire un processus stochastique gaussien à accroissements indépendants et stationnaires, de moyenne nulle et de variance proportionnelle au temps.

## 1.3 Existence et construction

Considérons $E$ un sous espace gaussien séparable de $L^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et prenons $G$ une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $E$.

On appelle pré-mouvement brownien les processus de la forme :

$$B_t = G(\mathbb{1}_{[0,t]}), \forall t \geq 0.$$

**Proposition 1.1.** *Soit $B$ un pré-mouvement brownien. Alors :*
— $K(s,t) = s \wedge t$
— $B_0 = 0$ *p.s.* , $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *et est indépendante de* $B_r$*, si* $0 \leq r \leq s < t$*.*

*Démonstration.* Puisque $G$ est une isométrie, on a :

$$\begin{aligned}
\forall s,t \geq 0, \quad K(s,t) &= \mathbb{E}\left[G(\mathbb{1}_{[0,s]})G(\mathbb{1}_{[0,t]})\right] \\
&= \left\langle G(\mathbb{1}_{[0,s]})G(\mathbb{1}_{[0,t]})\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle \mathbb{1}_{[0,s]}\mathbb{1}_{[0,t]}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= s \wedge t.
\end{aligned}$$

Ainsi $B_0 = 0$ p.s. (variance nulle). De plus, $B_t - B_s$ est une gaussienne centrée de variance :

$$\mathbb{V}(B_t - B_s) = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t + s - 2(s \wedge t) = t - s.$$

Enfin, les espaces gaussiens engendrés par $B_r, 0 \leq r \leq s$ et $B_t - B_s$ sont orthogonaux : $\mathbb{E}(B_r(B_t - B_s)) = r \wedge t - s \wedge t = 0$, ce qui donne l'indépendance des variables aléatoires[10]. □

Ces propriétés sont en fait équivalentes et caractérisent les pré-mouvements browniens. Ce qui fait défaut à ces processus pour être des mouvements browniens est la continuité. Celle-ci va être introduite grâce au théorème de continuité de Kolmogorov suivant :

9. Théorème A.3 en annexe.
10. Voir [LG13], Théorème 1.2 .

**Théorème 1.2** (Lemme de Kolmogorov)**.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire tel qu'il existe trois constantes $\varepsilon, C$ et $q$ strictement positives telles que :*

$$\mathbb{E}(|X_s - X_t|^q) \leq C|s-t|^{1+\varepsilon},$$

*alors $X$ admet une modification à trajectoires continues, et même localement holdëriennes d'exposant $\alpha \in ]0, \frac{\varepsilon}{q}[$.*

*Démonstration.* Se référer à [LG13], Théorème 2.1 pour la preuve. □

On en déduit alors le corollaire :

**Corollaire 1.3.** *Un pré-mouvement brownien admet une modification à trajectoires continues, qui est encore un pré-mouvement Brownien.*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer qu'un pré-mouvement brownien satisfait les hypothèses du lemme de Kolmogorov. Puisque $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, elle a même loi que $\sqrt{t-s}Y$ si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. On a donc pour tout $\gamma \geq 0$ :

$$\mathbb{E}(|B_t - B_s|^\gamma) \leq (t-s)^{\gamma/2}\mathbb{E}(Y^\gamma)$$

et le résultat s'ensuit en prenant $\gamma > 2$. Pour conclure, notons qu'une modification d'un pré-mouvement brownien est encore un pré-mouvement brownien.

□

Remarquons qu'en faisant tendre $\gamma$ vers l'infini, alors $\dfrac{\epsilon}{q} = \dfrac{\frac{\gamma}{2}-1}{\gamma} \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, et donc un pré-mouvement brownien admet une modification à trajectoires $\alpha$-holdëriennes pour $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$. Nous avons donc maintenant construit le bon candidat pour le mouvement brownien.

**Définition 1.4.** *Un pré-mouvement brownien à trajectoires continues est appelé mouvement brownien. Un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ est un vecteur $B = (B^1, \dots, B^d)$ où les composantes sont des mouvements browniens indépendants.*

Un tel processus existe bien puisque l'on a construit un pré-mouvement brownien, et que celui-ci admet une modification à trajectoires continues d'après le corollaire 1.3 qui est encore un pré-mouvement brownien. Avec cette définition, nous n'accordons pas d'importance à la régularité supérieure à la continuité du mouvement brownien. Nous ne l'utiliserons donc pas par la suite.

Étudions de suite une autre construction du mouvement brownien comme limite de marches aléatoires.

## 1.4 Mesure de Wiener et marches aléatoires

Dans toute cette section, on se référera à [Bil68], chapitre 2, en particulier pour les preuves des résultats annoncés. F On considère l'espace $C = C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme sup : $\|f-g\| = \sup_{[0,1]} |f(t) - g(t)|$, et de la tribu borélienne $\mathscr{C}$ ainsi induite. Il est tout à fait crucial de remarquer que la tribu borélienne coïncide avec la tribu produit, obtenue comme trace de la tribu produit de l'espace $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Ainsi, à l'aide d'une méthode de compacité-unicité, on pourra se ramener à l'étude des marginales fini-dimensionnelles.

L'objectif est de construire une mesure $W$ sur $(C, \mathscr{C})$ ayant les propriétés suivantes : si $(X_t)$ est un processus stochastique à trajectoires continues d'une part, sous $W$, la variable aléatoire $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,t)$, et d'autre part, sous $W$, le processus stochastique $X_t$ est à accroissements indépendants.

Intuitivement, si $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$, $W(\mathcal{C})$ est la probabilité que la trajectoire d'un mouvement brownien soit l'une des fonctions continues de $\mathcal{C}$.

Pour prouver l'existence de $W$, considérons $(\xi_k)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, centrées et réduites (donc possédant un moment d'ordre 2), posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ et introduisons les processus :

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor} + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}. \tag{1}$$

Le processus $X_n(.)(\omega)$ est l'interpolation linéaire des points $\frac{1}{\sqrt{n}} S_k$, $k \leq n$. À ce titre, il est à trajectoires continues. En effet, si $\lfloor nt \rfloor$ n'est pas un entier, pour $h$ assez petit : $X_n(t+h)(\omega) - X_n(t)(\omega) = h \frac{n}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$, et si $nt = k$ est un entier, $X_n(.)(\omega)$ est encore continu à droite en $t$, et si $h > 0$ est assez petit : $X_n(t-h)(\omega) - X_n(t)(\omega) = \frac{-nh}{\sqrt{n}} \xi_k(\omega) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Le théorème qui donne l'existence de $W$ est alors :

**Théorème 1.5** (Donsker)**.** *Si les variables aléatoire $X_n$ sont définies par* (1) *d'un espace commun $\Omega$ dans $C$, alors la suite $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ des lois de $(X_n)_{n\geq 1}$ sur $C$ converge étroitement vers une loi $W$ qu'on appelle mesure de Wiener, et qui vérifie les propriétés annoncées.*

*Démonstration.* Esquissons les principales étapes de la preuve. La notion essentielle est celle de *tension* d'une famille $\Pi$ de mesures de probabilité : une telle famille est dite tendue [11] si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K$ de $C$ tel que pour toute probabilité $\mathbb{P} \in \Pi$ on ait : $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$.

Ensuite, le théorème de Prokhorov [12] assure qu'une famille tendue sur un espace Polonais est relativement compacte, c'est à dire que toute suite de cette famille possède une suite extraite étroitement convergente.

L'objectif est donc de montrer que la famille $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Pour cela, on utilise le théorème d'Ascoli-Arzelà pour traduire la notion de compacité dans $C$ en un critère sur les modules de continuité des trajectoires ; on démontre alors grâce à l'expression explicite (1) que ce critère est bien vérifié.

Enfin, il reste à montrer que toute suite extraite étroitement convergente converge vers une même mesure sur $(C, \mathscr{C})$, qui vérifie les propriétés prescrites pour $W$. Pour cela, il faut remarquer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,t)$, et que les accroissements limites sont bien indépendants. Il s'agit là de montrer que l'on contrôle correctement les parties non indépendantes des accroissements de $(X_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini. □

C'est ce théorème d'universalité qui justifie l'importance et la validité du mouvement brownien comme processus gaussien : quelle que soit la nature de la marche

11. Lire *tight* en anglais.
12. Détails et démonstration de ce théorème sont donnés dans [Bil68].

aléatoire considérée, l'objet limite, dans un sens qui reste spécifique, ne peut être que le mouvement brownien tel qu'il est construit.

A l'aide de la mesure de Wiener, on dispose d'une façon canonique de construire un processus stochastique : le processus de Wiener, aussi appelé mouvement brownien. L'espace $(C, \mathscr{C}, W)$ est un espace probabilisé, et l'on pose :

$$\forall c \in C, \forall t \geq 0, \ \ B_t(c) = c(t). \tag{2}$$

En effet, on a alors, si $s \leq t$ :

$$K(s,t) = \mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)B_s] = s,$$

car d'une part, $B_t$ est un processus à accroissements indépendants sous $W$, et d'autre part, $B_s \sim \mathcal{N}(0, s)$. On a donc la caractérisation d'un pré-mouvement brownien. Étant à trajectoires continues par construction, c'est un mouvement brownien.

Il est tout à fait pertinent de remarquer que l'on peut également faire la construction inverse. Considérons $B$ un mouvement brownien sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et définissons $W$ comme la mesure image de $P$ par l'application :

$$\begin{cases} \Omega & \to C \\ \omega & \mapsto (t \mapsto B_t(\omega)) \end{cases}$$

Alors $W$ est la mesure de Wiener par les propriétés du mouvement brownien : la distribution est gaussienne et les accroissements sont indépendants. On dit alors que $W$ est la loi du mouvement brownien : tous les mouvements browniens induisent la même mesure image dans l'espace $C$.

# 2 Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles

## 2.1 Équation de la chaleur avec condition initiale

Nous allons voir de suite que le mouvement brownien est très lié à la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

**Proposition 2.1.** *Soit $B$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ et $g \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$. Notons $b_t^x$ la densité de la variable aléatoire $B_t^x = x + B_t$ si $t > 0$, et $b_0^x = \delta_x$. On a pour $t > 0$ :*

$$b(t,x,y) := b_t^x(y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

*Alors $b^x$ est le noyau de la chaleur au point $x$, c'est à dire que si $t > 0$, alors $\frac{\partial b}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\Delta_y b(t,x,y)$ et $b(0,x,\cdot) = b_0^x = \delta_x$ est bien la loi de $B_0^x$.*

*Démonstration.* Puisque l'on a l'expression explicite de $b_t^x$, un simple calcul direct conclut :

$$\frac{\partial b}{\partial t}(t,0,y) = \left(\frac{-d}{2t} + \frac{|x-y|^2}{2t^2}\right) b(t,0,y) = \frac{1}{2}\Delta_y b(t,0,y).$$

$\square$

Pour résoudre le cas général, on obtient alors la formule suivante :

**Proposition 2.2.** *Considérons le problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

*Alors la fonction* $u(t,x) = \mathbb{E}_x(g(B_t))$ *est solution du problème.*

*Démonstration.* Donnons une preuve directe par le calcul.

$$\mathbb{E}(g(x+B_t)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) b(t,x,y) \mathrm{d}y.$$

La fonction $b$ ainsi définie est $C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. Puisque pour tout $x$ : $\frac{\partial b}{\partial t} \in L^1(\mathrm{d}y)$ et pour tout $t > 0$ : $\Delta_x b \in L^1(\mathrm{d}y)$, alors par le théorème de dérivation sous le signe intégral, quels que soient $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) b(t,x,y)\mathrm{d}y\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \frac{\partial b}{\partial t}(t,x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \frac{1}{2}\Delta_x b(t,x,y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\Delta u(x,t). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ $u(0,x) = \mathbb{E}(g(x+B_0))$ et comme $g$ est continue et $B_0 = 0$ p.s. , $u(0,x) = g(x)$.

□

## 2.2 Équation de Laplace et problème de Dirichlet

Soit $B$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$, $U$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à bord régulier et $f \in C_b^0(\partial U)$. On cherche cette fois une solution $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ du problème :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in U \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in \partial U. \end{cases} \tag{4}$$

Alors en notant $T = \inf\{t \geq 0, x + B_t \in \partial U\}$ le temps de sortie de $U$ sous $\mathbb{P}_x$, la fonction $u(x) = \mathbb{E}_x(f(B_T))$ est l'unique solution du problème.

*Démonstration.* Les détails de la démonstration peuvent être trouvés dans [Dau89]. Exposons ici ses principales étapes. Commençons par montrer $\Delta u = 0$ sur $U$. A cause du temps d'arrêt, le calcul est plus délicat.

Le temps de sortie $T$ est fini presque-sûrement quel que soit le point de départ du mouvement Brownien. Soit $x \in U$ et $r < d(x, \partial U)$. Notons $R = \inf\{t \geq 0, |B_t| = r\}$ le temps de sortie de $B(x,r)$ sous $\mathbb{P}_x$. On montre alors que :

$$u(x) = \mathbb{E}_x(f(B_T)) = \mathbb{E}[u(x + B_R)].$$

Mais $B_R$ suit une loi uniforme sur $\partial B(0, r)$, donc finalement :

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y,$$

et donc $u$ est harmonique sur $U$. De plus, $u(x) = f(x), \forall x \in \partial U$. Il reste donc à montrer que $u \in C^0(\bar{U})$, ce que nous ne ferons pas ici.

Pour montrer que $u$ est bien unique, remarquons que si une autre solution $v$ existe, alors $u - v$ est une fonction continue sur $\bar{U}$ compact de $\mathbb{R}^d$ s'annulant sur $\partial U$. En particulier, $u - v$ est bornée et atteint ses bornes sur $\bar{U}$. Mais $u - v$ est harmonique sur $U$, et donc ne possède ni maximum ni minimum sur $U$ ouvert. Par conséquent, $u - v$ est nulle sur $\bar{U}$. $\square$

# 3 Processus de diffusion

## 3.1 Construction de l'intégrale stochastique

Rappelons la trame de la construction du crochet pour les martingales (locales) et semi-martingales, ainsi que de l'intégrale stochastique.

**Définition 3.1.** *Si $M$ est un processus adapté à trajectoires continues, tel que $M_0 = 0$ p.s. , c'est une martingale locale s'il existe $T_n$ une suite croissant vers l'infini de temps d'arrêts tels que $M^{T_n}$ soit une martingale pour tout $n$.*

**Théorème 3.2.** *Soit $M$ une martingale locale, alors il existe un unique processus croissant, noté $\langle M, M\rangle_t$ tel que $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ soit une martingale locale. Ce processus est appelé variation quadratique de $M$.*

On définit le crochet $\langle M, N\rangle$ de deux martingales locales par polarité :

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{2} \left(\langle M + N, M + N\rangle - \langle M, M\rangle - \langle N, N\rangle\right).$$

C'est un processus à variation finie.

Un processus croissant étant canoniquement associé à une mesure positive, on définit naturellement l'intégrale contre un tel processus. La même remarque est valable pour les processus à variation finie qui sont les différences de processus croissants. On note $(H \cdot V)_t = \displaystyle\int_0^t H_s \mathrm{d}V_s$ l'intégrale de $H$ contre un processus $V$ à variation finie. Passons maintenant à l'intégrale contre une martingale locale.

**Théorème 3.3.** *Soit $M$ une martingale locale, et $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(L)$, c'est à dire $H$ est un processus progressif tel que : $\displaystyle\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s < \infty$ p.s. $, \forall t \geq 0$. Alors il existe une unique martingale locale issue de $0$, notée $H \cdot M$ telle que pour toute martingale locale $N$, $\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle$.*

L'objet de droite est bien défini puisqu'il s'agit de : $H \cdot \langle M, N\rangle_t = \displaystyle\int_0^t H_s \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s$, et que [13]

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}\langle M, N\rangle_s \leq \left(\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \mathrm{d}\langle N, N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ p.s. },$$

Ainsi, on notera également $(H \cdot M)_t = \displaystyle\int_0^t H_s \mathrm{d}M_s$.

**Définition 3.4.** *On appelle semi-martingale un processus $X$ qui se décompose sous la forme $X = M + V$ où $V$ est un processus à variation finie et $M$ est une martingale. On définit alors :*

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot V,$$

*lorsque ceci a du sens, et si $Y = N + W$ est une semi martingale,*

$$\langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle.$$

Cette décomposition, lorsqu'elle existe, est toujours unique puisqu'une martingale qui est également un processus à variation finie est indistinguable de 0.

Puisque nous utiliserons par la suite ces résultats majoritairement sur des mouvements browniens, calculons tout de suite la variation quadratique du brownien.

**Proposition 3.5.** *Si $B$ est un mouvement brownien, c'est une martingale locale, et $\langle B, B\rangle_t = t$. Si $B$ est un brownien $d$ dimensionnel, alors $\langle B^i, B^j\rangle_s = \delta_{i,j} s$.*

*Démonstration.* Pour calculer $\langle B, B\rangle$, il s'agit donc de montrer que $B_t^2 - t$ est une martingale locale : le résultat découlera par unicité. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s] - t \\
&= B_s^2 + 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] - t \\
&= B_s^2 + 0 + \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] - t \\
&= B_s^2 - s.
\end{aligned}$$

Maintenant, si $B$ et $B'$ sont des browniens indépendants, il s'agit de montrer que $BB'$ est une martingale locale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t B_t'|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)(B_t' - B_s' + B_s')|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_t' - B_s')|\mathcal{F}_s] \\
&\quad + \mathbb{E}[B_s B_s'|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s' + (B_t' - B_s')B_s|\mathcal{F}_s] \\
&= B_s B_s',
\end{aligned}$$

tous les termes autres que $\mathbb{E}[B_s B_s'|\mathcal{F}_s]$ valant 0. □

Établissons maintenant une propriété essentielle pour la suite.

13. D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, voir [LG13], chapitre 4.

**Proposition 3.6** (Formule des moments)**.** *Soit $M$ une martingale locale et $H$ un processus $L^2_{\text{loc}}(M)$ tel que :*

$$\forall t \geq 0, \;\; \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] < \infty,$$

*alors*

$$\forall t \geq 0, \;\; \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \mathrm{d}M\right] = 0.$$

*Démonstration.* Puisque l'on a $\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle = H^2 \cdot \langle M, M\rangle$, on a immédiatement que la martingale locale $H \cdot M$ partant de 0 vérifie $\mathbb{E}\left[\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t\right] < \infty$ quel que soit $t \geq 0$, et donc [14] est une martingale. □

La formule suivante constitue le pilier central du calcul stochastique : elle permet d'établir un résultat analogue au théorème fondamental de l'analyse, avec des termes supplémentaires du deuxième ordre.

**Proposition 3.7** (Formule d'Itô)**.** *Soit $X = (X^1, \ldots, X^d)$ des semi-martingales continues, et $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $f(X)$ est une semi-martingale continue et :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\mathrm{d}\left\langle X_s^i, X_s^j\right\rangle. \tag{5}$$

Dans le cas particulier où $X$ est un mouvement brownien issu de $x$ on a :

$$f(x + B_t) = f(x) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + B_s)\mathrm{d}B_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x + B_s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

Pour étudier une première application de la formule d'Itô, démontrons le résultat suivant :

**Théorème 3.8** (Caractérisation de Lévy)**.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
— *$X_t$ est une martingale locale continue issue de $0$ telle que $\langle X, X\rangle_t = t$,*
— *$X_t$ est un mouvement brownien.*

*Démonstration.* Le sens réciproque a déjà été démontré. Intéressons nous donc au sens direct. Appliquons la formule d'Itô à la fonction $x \mapsto e^{i\xi x}$ :

$$e^{i\xi X_t} = 1 + \int_0^t i\xi e^{i\xi X_s}\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\xi^2 e^{i\xi X_s}\mathrm{d}s,$$

or la formule des moments s'applique car $\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(i\xi e^{i\xi X_s}\right)^2 \mathrm{d}s\right] < \infty$, et en passant à l'espérance :

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X_t}] = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 \int_0^t \mathbb{E}[e^{i\xi X_s}]\mathrm{d}s.$$

14. Voir [LG13], théorème 4.3.

À $\xi$ fixé, on reconnait une équation intégrale classique dont la solution est :

$$\Phi_{X_t}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t},$$

et donc $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. De plus, en appliquant le même raisonnement au processus $X_{t+s} - X_t$ on a :

$$e^{i\xi(X_{t+s}-X_t)} = 1 + \int_0^s i\xi e^{i\xi(X_{t+u}-X_t)}\mathrm{d}X_u + \frac{1}{2}\int_0^s -\xi^2 e^{i\xi(X_{t+u}-X_t)}\mathrm{d}u.$$

Pour toute variable aléatoire $Z$ et toute tribu $\mathcal{B}$ on a $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Z|\mathcal{B})]$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{i\xi(X_{t+s}-X_t)}|\mathcal{F}_t\right)\right] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^s i\xi e^{i\xi(X_{t+u}-X_t)}\mathrm{d}X_u\right] \\ - \frac{1}{2}\int_0^s \xi^2 \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{i\xi(X_{t+u}-X_t)}\middle| \mathcal{F}_t\right)\right]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

La formule des moments s'applique toujours, et l'on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{i\xi(X_{t+s}-X_t)}|\mathcal{F}_t\right)\right] = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 s}.$$

Par conséquent, l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_t$ par propriété de l'espérance conditionnelle. De plus, les accroissements sont également stationnaires et gaussiens. La preuve est donc terminée.

□

**Définition 3.9.** *On considère $\sigma \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ et $b \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Alors donner une solution $X$ à l'équation différentielle stochastique (EDS) :*

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t + b(t, X_t)\mathrm{d}t, \tag{7}$$

*sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ complètement filtré par $(\mathcal{F}_t)$ est donner un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien $B$ de dimension $d$ ainsi qu'un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à trajectoires continues $X$ tel que :*

$$\forall t \geq 0,\ \ X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s. \tag{8}$$

*Les processus ainsi définis sont appelés processus de diffusion.*

**Théorème 3.10.** *Si $\sigma$ et $b$ sont continues, et lipschitziennes en la variable d'espace, alors quel que soit l'espace filtré, quel que soit le mouvement brownien choisi, et quel que soit $x \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution à l'EDS (7) telle que $X_0 = x$ presque-sûrement.*

La preuve complète de ce théorème est donnée dans [LG13]. Notons également que l'on y distingue plusieurs notions de solutions et d'unicité afin d'alléger l'hypothèse lipschitz sur les coefficients.

## 3.2 Générateurs des processus de diffusion

**Générateur du brownien.** Soit $Q_t f(x) = \mathbb{E}(f(x+B_t))$. Si $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ telle que les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\Delta f$ soient bornées sur $\mathbb{R}^d$, alors d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
Lf(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(Q_t f(x) - f(x)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mathbb{E}[f(x+B_t) - f(x)]\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+B_s)\mathrm{d}B_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+B_s)\mathrm{d}s\right]\right).
\end{aligned}$$

Or d'une part :

$$\forall 1 \leq i \leq d,\ \ \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+B_s)\mathrm{d}B_s^i\right] = 0,$$

d'après la formule des moments, car :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+B_s)\right)^2 \mathrm{d}s\right] \leq t\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty^2 < \infty,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+B_s)\mathrm{d}s\right] - \Delta f(x)\right| \\
&\qquad\qquad \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^d \int_0^t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+B_s) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\right| \mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque ces dérivées partielles sont continues, alors

$$\exists \delta > 0,\ \ \forall |y| < \delta, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Avec les notations de la proposition A.1, si $s \leq \dfrac{x_\varepsilon}{\delta}$, l'événement $|B_s| > \delta$ arrive avec probabilité plus petite que $\varepsilon$, et donc dans ce cas :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+B_s) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\right| \mathrm{d}s\right] \leq \varepsilon t + \varepsilon t \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

et donc finalement : $Lf(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x)$.

Écrivons maintenant le théorème fondamental de cette étude, faisant le lien entre une certaine classe d'équations paraboliques et les processus de diffusions.

**Théorème 3.11.** *Soit $g \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux fonctions lipschitziennes, et $X$ une solution de l'EDS :*

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

*Alors la fonction $u(t,x) = \mathbb{E}_x(g(X_t))$ est solution de l'équation parabolique :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (Lu)(t,x) \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \tag{10}$$

*où*

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^\star)_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

*est le générateur du processus de Markov $X$.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que : $\mathrm{d}X_t^i = \sum_{k=1}^{d}\sigma_{i,k}(X_t)\mathrm{d}B_t^k + b_i(X_t)\mathrm{d}t$.

D'après la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} g(X_t) &= g(X_0) + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_s)\left[\sum_{k=1}^{d}\sigma_{i,k}(X_s)\mathrm{d}B_s^k + b_i(X_t)\mathrm{d}s\right] \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(X)\mathrm{d}\left\langle \sum_{k=1}^{d}\sigma_{i,k}(X)B^k, \sum_{k=1}^{d}\sigma_{j,k}(X)B^k\right\rangle_s \\ &= g(X_0) + \int_0^t (Lg)(X_s)\mathrm{d}s + \sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \sigma_{i,j}(X_s)\frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}B_s^i, \end{aligned}$$

puisque :

$$\mathrm{d}\left\langle \sum_{k=1}^{d}\sigma_{i,k}(X)B^k, \sum_{k=1}^{d}\sigma_{j,k}(X)B^k\right\rangle_s = \sum_{k=1}^{d}\sigma_{i,k}\sigma_{j,k}(X_s)\mathrm{d}s.$$

Or :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{i,j}(X_s)\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}s\right] \leq t\,\|\sigma\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{d}\left\|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\|_\infty^2 < \infty,$$

la formule des moments s'applique donc et l'on a :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \sigma_{i,j}(X_s)\frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}B_s^i\right] = 0,$$

et finalement :

$$\mathbb{E}_x[g(X_t)] = g(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^t (Lg)(X_s)\mathrm{d}s\right].$$

L'espérance et les dérivations commutant par convergence dominée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathbb{E}_x\left[(Lg)(X_t)\right] = (Lu)(t,x).$$

La fonction $u(t,x) = \mathbb{E}_x(g(X_t))$ est donc bien solution de l'équation (10) puisque $u(0,x) = g(x)$. Pour achever la preuve, il reste à montrer que $L$ est bien le générateur du processus de Markov $X$, ce qui s'obtient d'une manière similaire au calcul mené pour le mouvement brownien. $\square$

Remarquons qu'en dimension 1, l'opérateur $L$ devient : $Lf = \frac{1}{2}\sigma^2 f'' + bf'$ en tant que générateur du processus de Markov, qu'il faut comprendre $Lf = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial f}{\partial x}$ lorsqu'écrit dans l'équation (10).

Notons $\mathbb{P}_{X_t}$ la loi du processus $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, et supposons que pour un $t$ donné, elle possède une densité $q(t, x, y)$, si $x$ est le point de départ du porcessus. Explicitons la forme de la solution :

$$u(x,t) = \int_\Omega g(X_t)\mathbb{P}_{X_t} = \int_\mathbb{R} g(y)q(t,x,y)\mathrm{d}y.$$

$$= \int_R \int_0^T g(y)q(\tau - t, x, x-(x-y))\mathrm{d}\delta_t\mathrm{d}y$$

# 4 Applications

## 4.1 Simulation numérique, méthode de Monte-Carlo

Le lien très fort entre les processus solutions des équations différentielles stochastiques et les solutions des équations aux dérivées partielles classiques est très utile, grâce à la méthode de Monte-Carlo, pour résoudre numériquement ces dernières équations. En effet, puisque l'on écrit par le théorème 10 la solution du problème 3 sous la forme :

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x(g(X_t)),$$

où $X_t$ est un processus de diffusion, la simulation numérique de cette solution est propice à l'emploi de la méthode de Monte-Carlo. En effet, rappelons que si $Y$ est une variable aléatoire que l'on sait simuler, alors un estimateur non biaisé de l'espérance de $Y$ est :

$$\hat{\theta} = \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

où les $Y_i$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que $Y$, c'est à dire ici des simulations indépendantes de $Y$. La loi des grands nombres assure la convergence de l'estimateur, et la vitesse de convergence en probabilité est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ :

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - \mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{n\varepsilon^2},$$

par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et le terme $n\varepsilon^2$ montre que pour une fiabilité fixée, l'erreur commise $\varepsilon$ est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Essayons donc de donner un ordre de grandeur pour la complexité d'un programme calculant la valeur de la solution $u$ au point $(t,x)$. L'idée est de prendre comme valeur approchée de $u(t,x) = \mathbb{E}(g(X_t))$ l'expression $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_{t,i})$, où les $X_{t,i}$ sont $n$ simulations de $X_t$ indépendantes. Le coût de l'opération est donc de l'ordre de $nc(X_t)$ où $c(X_t)$ désigne le coût d'une simulation de la variable $X_t$.

Simuler $X_t$ revient essentiellement à la simulation d'un mouvement brownien (le calcul du drift étant négligeable en comparaison). Puisque le mouvement brownien est une limite de marche aléatoire, nous allons faire l'hypothèse que le coût s'écrit sous la forme : $c(X_t) = cT + o(T)$, où $T$ est le nombre d'instants considérés pour la marche aléatoire. Le coût total en $n$ et $T$ de la simulation est donc en ordre de grandeur : $\Theta(nT)$.

En comparaison, par une méthode des éléments finis naïve, qui nécessite en premier lieu de se restreindre à un ensemble borné, si $D$ est la dimension caractéristique de l'ouvert $\Omega$ d'étude, si $N$ est le nombre de points divisant la longueur $D$, de sorte que la discrétisation spatiale soit de l'ordre $h = \frac{D}{N}$, le nombre de points de calcul est donc de l'ordre de $N^d$ où $d$ est la dimension de l'espace, et si $T'$ désigne la discrétisation en temps, le temps de calcul pour un schéma explicite est donc de l'ordre de $\Theta(N^d T')$.

Afin de pouvoir comparer les deux résultats, il s'agit de pouvoir comparer, pour une précision requise donnée, les ordres de grandeur de $N$ et $n$, et $T$ et $T'$. Puisque le déplacement caractéristique d'un mouvement brownien lors d'un temps $t$ est proportionnel à $\sqrt{t}$, il est raisonnable de choisir $\sqrt{T}$ de l'ordre de $N$, de sorte que $D$ soit de l'ordre de $\sqrt{t}$ pour la même précision $\frac{t}{T} = DN$. Si le schéma choisi a une précision de l'ordre de $h^2$, il est donc naturel de choisir $n$ tel que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ soit de l'ordre de $h^2$, c'est à dire $n$ est de l'ordre de $N^4$. Ainsi, le coût de la méthode de Monte-Carlo s'écrit sous la forme $\Theta(N^6)$. En particulier, il est indépendant de la dimension. De fait, il est clair qu'en grande dimension, la méthode de Monte-Carlo est pertinente.

Plus de détails sur cette méthode sont donnés dans [LPS98].

## 4.2 Temps de sortie

L'objectif de cette section va être d'utiliser l'analogie dans le sens inverse. En supposant que l'on sait résoudre le problème $Lu = f$ pour des fonctions $f$ bien choisies, nous allons en déduire des propriétés probabilistes sur la solution de l'équation (9).

Supposons donc que l'on dispose d'une solution $X$ de l'équation (9) en dimension 1. En vertu du théorème 3.11, on pose donc $Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)f'' + b(x)f'$. On s'intéresse à un problème de type ruine du joueur : si $a < b$, et $x \in ]a, b[$, alors peut-on expliciter la probabilité $\mathbb{P}_x(T_a < T_b)$, où $T_p$ est le temps de premier passage en $p$ ?

Donnons-nous une solution $g \in C^2$ du problème :

$$\begin{cases} Lg = -1 \\ g(a) = g(b) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Alors d'après la formule d'Itô :

$$\forall t \geq 0, \;\; g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t Lg(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)g'(X_s)\mathrm{d}B_s,$$

et donc si $T$ est un temps d'arrêt :

$$g(X_{t\wedge T}) = g(X_0) - t \wedge T + \int_0^{t\wedge T} \sigma(X_s)g'(X_s)\mathrm{d}B_s.$$

Si quel que soit $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T} (\sigma(X_s)g'(X_s))^2 \,\mathrm{d}s\right] < \infty$ , en passant à l'espérance, à l'aide de la formule des moments, on a :

$$\mathbb{E}_x[g(X_{t\wedge T})] = g(x) - \mathbb{E}_x(t \wedge T).$$

Lorsque $T = T_a \wedge T_b$ c'est le cas puisque $X_{t\wedge T}(\omega) \in [a, b]$ pour tout $\omega$, et donc :

$$\mathbb{E}_x(t \wedge T) \leq 2\|g\|_\infty < \infty,$$

où la norme infinie est prise sur $[a, b]$. Par le théorème de convergence monotone, quand $t$ tend vers l'infini, $t \wedge T$ converge vers $T$, donc d'une part, $\mathbb{E}_x(T) < \infty$, ce qui est le résultat important, et d'autre part, par convergence dominée, $\mathbb{E}_x[g(X_{t\wedge T})] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x[g(T)]$ ce qui donne :

$$\mathbb{E}_x(T) = g(x). \tag{12}$$

Donnons-nous maintenant une solution $h \in C^2([a, b])$ au problème $Lh = 0$. Par les mêmes arguments et puisque l'on sait désormais que $T < \infty$ p.s. , on a :

$$\mathbb{E}_x[h(X_{t\wedge T})] = h(x),$$

et par convergence dominée $\mathbb{E}_x(h(X_T)) = h(x)$. Or $\mathbb{E}_x(h(X_T)) = \mathbb{P}_x(T = T_a)h(a) + \mathbb{P}_x(T = T_b)h(b)$ puisque $X$ est à trajectoire continue, de sorte que $T_a \neq T_b$, [ p.s. ou pas ?] et donc finalement :

$$\mathbb{P}_x(T = T_b) = \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)}. \tag{13}$$

On retrouve le résultat remarquable que la quantité $\frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}$ ne dépend pas de la solution $h$ choisie au problème $Lh = 0$, dû à la forme lacunaire à l'ordre 0 de l'opérateur $L$.

Écrivons la forme explicite de $h$. Il s'agit de résoudre $Lh = 0$, c'est à dire

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)h''(x) + b(x)h'(x) = 0.$$

Dans le cas où $\sigma$ et $b$ sont continues, si $\sigma$ ne s'annule pas sur $[a, b]$ on a :

$$h'(x) = A \exp\left(-\int_c^x \frac{2b(t)}{\sigma^2(t)}\mathrm{d}t\right),$$

et donc

$$h(x) = h(c) + A\int_c^x \exp\left(-\int_c^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t, \tag{14}$$

où $c \in ]a, b[$ est pris quelconque [15] : le choix de $A$ et $h(c)$ déterminera ensuite l'ensemble des solutions.

En injectant ce résultat dans la formule (13), on obtient :

$$\mathbb{P}_x(T = T_b) = \frac{\tilde{h}(x)}{\tilde{h}(b)},$$

15. Il sera pertinent de prendre $a = c$ pour écrire une formule la plus intuitive, mais l'objectif sera de traiter le cas où les coefficients peuvent s'annuler en $a$ ou $b$, auquel cas il vaut mieux prendre $c \in ]a, b[$.

où $\tilde{h}(x) = \int_a^x \exp\left(-\int_c^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$, et la remarque faite sur la non importance du choix des constantes d'intégration est maintenant claire.

Si $\sigma$ s'annule sur $[a, b]$, alors le problème est plus délicat et nécessite des précautions. C'est par exemple le cas dans le modèle de Wright-Fisher que nous aborderons plus bas.

Calculons explicitement de la même manière l'espérance du temps de sortie. Il s'agit de résoudre le problème (11). L'équation étant inhomogène, on calcule d'abord une solution particulière au problème $Lg = -1$ :

$$\tilde{g}(x) = \int_c^x h'(t) \int_c^t \frac{-2}{\sigma^2(u)h'(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}t.$$

La solution du problème (11) prenant en compte les conditions au bord est donc la fonction $g(x) = \tilde{g}(x) + h(x)$ où les constantes indéterminées de $h$ sont choisies telles que $g(a) = g(b) = 0$.

**Premier exemple.** On se place dans le cas où $\sigma(x) = \sigma > 0$ est constante et $b = 0$, c'est à dire $X$ est un mouvement brownien. Alors on retrouve le résultat bien connu :

$$\mathbb{P}_x(T = T_b) = \frac{x-a}{b-a},$$

puisqu'alors $L = \sigma^2 f''$ et donc $h(x) = h(a) + (h(b) - h(a))\dfrac{x-a}{b-a}$ quelle que soit $h$ vérifiant $Lh = 0$.

Ce résultat s'étend immédiatement au cas où $\sigma(x) > 0$ pour tout $x$, et donc la probabilité de sortie par un point ne dépend pas du coefficient de diffusion $\sigma$ dès que le drift $b$ est nul.

## 4.3 Diffusion de Wright-Fisher

On s'intéresse ici à un cas particulier : le modèle de Wright-Fisher, qui correspond à l'EDS :

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t(1-X_t)}\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t, \tag{15}$$

et à l'équation parabolique associée :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x). \tag{16}$$

Le processus $(X_t)$ représente la limite de diffusion d'un processus discret décrivant l'évolution d'une proportion de présence d'un allèle au cours des générations successives d'individus dans un modèle à deux allèles. Le coefficient $b$ s'écrit dans le modèle de Wright-Fisher : $b(x) = x\beta_1 + (1-x)\beta_2 + sx(1-x)$ et rend compte des mutations des deux allèles ainsi que d'un avantage sélectif pour l'allèle considéré. On pourra se référer à [Mél16] pour l'établissement de cette équation à partir du modèle génétique.

Compte tenu des résultats précédents ainsi que de la forme du coefficient $b$, on voit directement que dans le cas de la diffusion neutre, c'est à dire $b = 0$, on obtient la même chose que pour le mouvement brownien :

$$\mathbb{P}_x(T = T_1) = x,$$

et si l'on prend les coefficients de mutations nuls mais le coefficient de sélection non nul, c'est à dire $b(x) = sx(1-x)$, alors $\dfrac{2b}{\sigma^2} = 2s$ est intégrable, et l'on a :

$$\int_c^x \exp\left(-\int_c^t 2s\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = e^{2sc}(1-e^{-2sx}),$$

et donc :

$$\mathbb{P}_x(T = T_1) = \frac{1-e^{-2sx}}{1-e^{-2s}}.$$

Mentionnons ici que l'on ne peut exprimer l'espérance du temps de sortie qu'en fonction de l'intégrale :

$$\int_c^x \exp(-2s(t-c))\int_c^t \frac{-2\exp(2s(u-c))}{u(1-u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}t.$$

Une étude beaucoup plus poussée de l'opérateur de Wright-Fisher est faite dans [EM09].

## 4.4 Modèle de Black-Scholes

Pour décrire l'évolution du prix d'une option, Bachelier dans [Bac00] a été amené à introduire des outils en lien avec le mouvement brownien. Toutefois, en 1973 a été introduit par Robert C. Merton le modèle dit de Black-Scholes, inspiré des travaux de Bachelier, qui utilise non pas le mouvement brownien mais le *mouvement brownien géométrique*, que nous allons définir comme la solution d'une nouvelle équation différentielle stochastique :

$$\mathrm{d}X_t = \sigma X_t \mathrm{d}B_t + bX_t\mathrm{d}t, \tag{17}$$

où $\sigma$ et $b$ sont des constantes. L'opérateur associé est donc $Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2x^2f''(x) + bxf'(x)$. Notons $\lambda = \frac{-2b}{\sigma^2} + 1$. La solution générale du problème $Lh = 0$ est donc $h(x) = B + \frac{A}{\lambda}x^\lambda$, et si $0 < \alpha < \beta$ sont des bornes fixées, alors :

$$\mathbb{P}_x(T_\beta < T_\alpha) = \frac{x^\lambda - \alpha^\lambda}{\beta^\lambda - \alpha^\lambda}.$$

Une solution particulière au problème $Lg = -1$ est $\frac{2\ln(x)}{\sigma^2}$, et la solution générale doit donc vérifier le système :

$$\begin{cases} 0 = B + \frac{A}{\lambda}\alpha^\lambda + \frac{2}{\sigma^2}\ln(\alpha) \\ 0 = B + \frac{A}{\lambda}\beta^\lambda + \frac{2}{\sigma^2}\ln(\beta), \end{cases}$$

ce qui donne $A = \dfrac{2\lambda(\ln(\beta)-\ln(\alpha))}{\sigma^2(\alpha^\lambda-\beta^\lambda)}$ et $B = -\dfrac{2(\ln(\beta)-\ln(\alpha))}{\sigma^2(\alpha^\lambda-\beta^\lambda)}\alpha^\lambda - \frac{2}{\sigma^2}\ln(\alpha)$.

Finalement, on a l'expression générale :

$$\mathbb{E}_x(T) = \frac{2(\ln(\beta)-\ln(\alpha))}{\sigma^2(\alpha^\lambda-\beta^\lambda)}(x^\lambda-\alpha^\lambda) + \frac{2}{\sigma^2}(\ln(x)-\ln(\alpha)).$$

Une nouvelle fois, dans ce dernier exemple, résoudre une équation aux dérivées partielles nous a permis d'obtenir des informations probabilistes sur un processus de diffusion.

# Annexe : Compléments de probabilités

**Proposition A.1** (Quantiles centrés de vecteurs gaussiens)**.** *Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma\sigma^\star)$. La fonction :*

$$\phi : \begin{cases} [0, \infty] & \to [0,1] \\ x & \mapsto \mathbb{P}(|X| \leq x) \end{cases}$$

*est une fonction continue croissante, valant $0$ en $0$ et $1$ en l'infini. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon$ tel que $\phi(x_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, ce qui donne quel que soit $t > 0$, $\mathbb{P}(|tX| \leq tx_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$.*

**Proposition A.2** (Lois stables)**.** *Si la loi $\mathbb{P}$ est stable, c'est à dire si quel que soit $X$ et $Y$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathbb{P}$ il existe $a$ et $b$ tels que $aX + bY \sim \mathbb{P}$, alors il existe $\alpha, \beta, \sigma$ et $\mu$ quatre réels tels que $0 < \alpha \leq 2$ et :*

$$\Phi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X}] = \begin{cases} \exp\left[-\sigma^\alpha |\xi|^\alpha \left(1 - i\beta(\text{sign}\xi)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu\xi\right] & si\ \alpha \neq 1 \\ \exp\left[-\sigma|\xi| \left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}\xi)\ln|\xi|\right) + i\mu\xi\right] & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

On trouvera la démonstration ainsi qu'une extension du théorème central limite aux lois stables dans [ST94], en particulier la Definition 1.1.6.

**Théorème A.3** (Lévy-Cramér)**.** *Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X + Y$ suit une loi normale, alors $X$ et $Y$ suivent des lois normales.*

Ce résultat est donné dans [Fel71] et [LL65]. Conjecturé par Lévy, il est démontré par Cramér en 1936, et présenté dans le tome 202 des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

**Proposition A.4** (Représentation de Lévy-Khintchine)**.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
— *la variable $X$ suit une loi infiniment divisible,*
— *sa fonction caractéristique $\Phi_X$ vérifie :*

$$\Phi_X(\xi) = \exp\left(i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1 + x^2}\right) \mathrm{d}n(x)\right),$$

*où $\mu$ et $\sigma$ sont des constantes, et $n$ est une fonction croissante ($\mathrm{d}n$ est une mesure positive).*

On en trouvera la démonstration complète dans [LL65]. L'intégrale correspond à la partie discontinue du processus.

**Théorème A.5.** *Si $X_t$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires presque sûrement continues, alors $X_t$ suit une loi normale de moyenne $\mu(t)$ et de variance $\sigma^2(t)$ qui sont des fonctions continues de $t$.*

Ce théorème s'obtient à partir de la représentation de Lévy-Khintchine (proposition A.4), ou plus simplement comme conséquence du théorème de Laplace-Liapounov selon [LL65].

# Références


[Bac00] L. Bachelier : Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure*, 17, 1900.

[Bil68] P. Billingsley : *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in probability and Mathematical Statistics : Tracts on probability and statistics. Wiley, 1968.

[Bro28] R. Brown : Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine Series 2*, 4(21):161–173, 1828.

[Dau89] R. Dautray : *Méthodes probabilistes pour les équations de la physique*. Eyrolles, Paris, 1989.

[Ein05] A. Einstein : Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549–560, 1905.

[EM09] C. L. Epstein et R. Mazzeo : Wright-Fisher Diffusion in One Dimension. *ArXiv e-prints*, juillet 2009.

[Fel71] W. Feller : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2*. Wiley, New York, NY, second édition, 1971.

[Kah96] J.-P. Kahane : Le mouvement brownien. *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XIXe Siècle*, 1996.

[LG13] J.-F. Le Gall : *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[LL65] P. Lévy et M. Loève : *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars Paris, seconde édition, 1965.

[LPS98] B. Lapeyre, E. Pardoux et R. Sentis : *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[Mél16] S. Méléard : *Modèles aléatoires en Écologie et Évolution*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[Per09] J. Perrin : *Mouvement Brownien et réalité moléculaire*. Annales de chimie et de physique. Masson et Cie, Éditeurs, 1909.

[ST94] G. Samorodnitsky et M. S. Taqqu : *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, 1994.

[Taq01] M. S. Taqqu : Bachelier et son époque : une conversation avec Bernard Bru. *Journal de la société française de statistique*, 142(2):3–40, 2001.

[Wie23] N. Wiener : Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1-4):131–174, 1923.